

ASTRONOMÍA, MATEMÁTICA Y ESCUELA.
ARA SOLIS: DISPOSITIVO DIDÁCTICO, EJEMPLIFICADO PARA ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO, QUE PERMITA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EN LA UBICACIÓN DE CUERPOS CELESTES CON BASE EN LOS DISEÑOS Y REGISTROS ASTRONÓMICOS QUE LOS MUISCAS DEJARON ESTABLECIDOS EN EL PARQUE ARQUEOLÓGICO DE MONQUIRA – BOYACÁ.

DIEGO ARMANDO GAMBA HERRERA

FABIÁN ORLANDO BOGOTÁ RIVEROS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2013



Astronomía, Matemática Y Escuela

ARA SOLIS: Un dispositivo didáctico, ejemplificado para educación media, que permita la construcción de las funciones trigonométricas, en la ubicación de cuerpos celestes con base en los diseños y registros astronómicos que los muiscas dejaron establecidos en el Parque Arqueológico de Monquirá – Boyacá.

**Diego Armando Gamba Herrera
Fabián Orlando Bogotá Riveros**

Asesores:

**Martha Vidal Arizabaleta
Camilo Delgado Correa**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**

2013

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

AGRADECIMIENTOS.

Primero que todo agradecer al Padre que está en los cielos, que ilumina día a día el camino, que lo ha llenado de constante aprendizaje y cada día lo forja para que seamos mejores, que nos escogió entre miles para que aprendamos y transitemos el camino que forja al verdadero guerrero.

A la fuente de nuestra inspiración que nos han enseñado, que no hay imposibles en la vida, que con su constante apoyo, amor y regaños nos llevó a la consolidación de este proyecto de vida. A nuestras madres, Lilia Herrera y Felisa Riveros.

A nuestros padres Pablo Gamba y Luis Bogotá que nos enseñaron la importancia del trabajo y que con sus defectos o virtudes nos mostraron como debe ser un verdadero hombre.

A la profesora Martha Vidal que siempre mostró su entusiasmo y colaboración por el desarrollo de este proyecto y siempre tuvo fe en nosotros.

Al profesor Camilo Delgado Correa que le dio nueva perspectiva al desarrollo del proyecto y que siempre aportó significativamente para la construcción de Ara Solis.

A Sembrar Colombia que nos abrió los ojos a mundos mágicos pero posibles, que nos enseñó que el trabajo es el que forma al hombre y es padre de la amistad, que nos enseñó amar esta patria y que nos induce a ser siempre mejores.

A Maritza Villalobos que fue de las primeras personas que tuvo en sus manos este trabajo y que motivo para su elaboración.

A nuestro Maestro que nos impulsa en la búsqueda de la perfección y que es nuestro constante ejemplo.

Muchas Gracias.

DEDICATORIA

Esta monografía está dedicada aquellos personajes cuyos nombres han sido borrados del libro de la historia o relegados a un segundo plano, personajes que a través de su pluma transmitieron esos conocimientos que permite ese contacto con el Padre, que nos acerca al cielo. Cuyo nombre ha sido escrito con letras de oro en el libro de la historia que escriben los ángeles para la gloria de Dios.

Personajes que nos enseñan que hay que escrutar a donde otros ya no buscan, bien sea porque no entienden, no les interesa o se les olvido como buscar, que nos enseñan que vale la pena ser diferente, porque todos somos diferentes y que el verdadero héroe es aquel que resiste un segundo más.

Esta monografía está dedicada a todos aquellos que dejaron su huella que describe ese camino que lleva al cielo.

“No es la meta la que concede la gloria, son la dificultad del camino y el honor con el cual el verdadero guerrero lo transita lo que finalmente comunica con el cielo y conduce a la victoria”

Alfonso Gómez Orduz.

Manual del buen escudero.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	1
1. CAPÍTULO: ASPECTOS PRELIMINARES	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del problema	9
1.3. Pregunta de investigación	14
1.4. Objetivos	14
General	14
Específicos	15
1.5. Justificación	15
2. CAPITULO: DESARROLLO METODOLÓGICO.	19
2.1.1. Población	23
2.1.2. Instrumentos de recolección de información	23
3. CAPÍTULO: LA FUENTE DE LA MATEMÁTICA Y LA ASTRONOMÍA.....	27
3.1. Ubicación en el espacio: las coordenadas horizontales.....	27
3.2. Las matemáticas del cielo: evolución histórica de la astronomía y trigonometría.....	32
3.2.1. El origen (Mesopotamia y Egipto)	33
3.2.2. Los triángulos griegos.....	35
3.2.3. Bases de la trigonometría (Siglo III y II)	38
3.2.4. La mística Hindú y la trigonometría Árabe.....	42
3.2.5. Conceptos matemáticos para “Ara Solis”	44
3.3. Paralaje: un acercamiento a las estrellas.....	45
3.4. Tiempos en astronomía (calendarios astronómicos).....	47
4. CAPÍTULO. SOPORTE TEÓRICO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE (DIDÁCTICA).....	52
4.1. Matemática y el contexto.	52
4.2. Ara Solis como Dispositivo didáctico.....	54
4.3. Enseñanza de la Trigonometría plana.	56
5. CAPÍTULO: EL AVANCE DE LA TECNOLOGÍA Y LA EDUCACIÓN.....	63
5.1. El uso y la interpretación de tecnología en la enseñanza de la función trigonométrica.	63
5.2. Stellarium una puerta al universo.	66
6. CAPÍTULO: ANÁLISIS: PROTOCOLO DE CONSTRUCCIÓN DEL DISPOSITIVO DIDÁCTICO.	71
6.1. Las luciérnagas del cielo: lo que se observa en una noche de verano.....	71

6.2.	La Arqueoastronomía: un viaje al pasado a través de una noche sempiterna.	75
6.3.	¿Porque Villa de Leyva? Entre la bóveda celeste y la tierra. El observatorio astronómico Muisca “el infiernito”.	87
6.4.	Ara Solis como dispositivo transversal entre lo didáctico, lo matemático y el contexto por medio del componente legal.	96
6.5.	RUTA DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA EN ARA SOLIS	105
6.6.	CUADRO CONCEPTUAL DE LA RUTA DE APRENDIZAJE	106
6.7.	LA TRIGONOMETRIA DE ARA SOLIS.....	107
7.	CAPÍTULO: REFLEXIONES Y CONCLUSIONES.....	114
7.1.	Perspectivas	115
7.2.	Correspondencia con los objetivos propuestos.	115
8.	BIBLIOGRAFÍA	122
9.	ANEXOS	128
10.	ÍNDICE DE FIGURAS	131

INTRODUCCIÓN

La matemática es una disciplina que se resalta por estar en contacto con las demás disciplinas, asumiendo que en el momento de llevar este conocimiento al aula de clase se cuenta con herramientas que permitan evidenciar la belleza de las matemáticas en sus diferentes aplicaciones, pero lo que se evidencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje es un llamado a esa contextualización que genere aprendizajes significativos, la pregunta es ¿en qué momento se perdió esa relación entre las distintas disciplinas?

Este proyecto nace como idea inicial instaurada en un espacio de formación que ofrece el proyecto curricular de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, en séptimo semestre por el eje de Problemas, denominada Taller de Ciencias. En este espacio de formación se trabajaron contenidos matemáticos que estaban inmersos en situaciones particulares de la vida y aplicaciones físicas, como la estructura y comportamiento de los espejos, el sonido, la maquinas simples y la astronomía. Todas las situaciones diseñadas con un profundo énfasis matemático.

A partir del trabajo realizado con el componente astronómico, suscitó ese interés por trabajar con el estudio de la bóveda celeste para la enseñanza de las matemáticas como contexto próximo a los estudiantes, pues inclusive en el cielo nocturno de Bogotá se divisan algunas constelaciones como Orión, Escorpión, Sagitario, Tauro, la cruz del sur entre otras, algunos planetas como Júpiter y Venus, cúmulos como las pléyades y por supuesto la Luna y el Sol, de esta manera estos cuerpos realizan movimientos en el cielo, desde el punto de vista de un observador en la tierra en donde entra a jugar un componente matemático.

El desarrollo de la presente propuesta tiene como experiencia previa el contexto de Villa de Leyva, un municipio con un gran atractivo turístico por su centro histórico y arquitectónico plasmado en sus calles empedradas y sus edificaciones, en donde se evocan ese periodo de espadas y cruces manifestado en el legado español. Además de aquellos vestigios en fósiles de una época en la que Villa de Leyva estaba bajo el agua y de ese proceso de sedimentación de la tierra, y sobre todo sus noches estrelladas en las que la observación de la bóveda celeste se hace fascinante, pues los cuerpos astrales se

presentan como gotas de luz en esa nube etérea dispuestas a caer a la tierra, motivo por el cual muchos astrónomos se interesan por este sector realizándose el festival anual de astronomía.

Al encontrar que la astronomía tiene un profundo énfasis matemático y de aplicación como ciencia y desde la perspectiva de la L.E.B.E.M. de desarrollar el pensamiento matemático por medio de la resolución de problemas, como metodología innovadora en las prácticas educativas de la enseñanza de las matemáticas, parece relevante desarrollar una propuesta de la enseñanza de las matemáticas que incluya a la astronomía como recurso didáctico que cuenta con una práctica y un contexto en el que se puede aprender y enseñar matemáticas.

Los componentes básicos de la educación matemática son: el aprendizaje, la práctica y la enseñanza de la matemática (D'more, 2006, pág. 15). La investigación de esta práctica cuestiona las herramientas, dispositivos, métodos y enfoques que faciliten el significado del objeto matemático que se estudia en el aula de clase. Así, de esta manera la astronomía por su componente experimental y su fundamento matemático para este caso basada en la trigonometría, en el que se modelan situaciones de un entorno determinado, para la resolución de problemas matemáticos.

Por tanto, este trabajo pretende mostrar el uso de la astronomía en la que recaen las bases para el estudio de la trigonometría plana como el componente matemático del trabajo a desarrollar, el uso del software de libre acceso *Stellarium*, que permite ejemplificar el comportamiento de la bóveda celeste y la ubicación de los cuerpos astrales, enlazados bajo los registros astronómicos que dejaron los muiscas en el parque arqueológico de Monquirá, como un eje contextualizador en la enseñanza de las mismas matemáticas, por medio del dispositivo didáctico Ara Solis. Ya que en Colombia también existe un fuerte trabajo en el estudio de la astronomía tanto en culturas precolombinas que se evidencia en los vestigios encontrados en San Agustín, en Tierra Adentro, y en el ya mencionado parque de Monquirá (el infiernito) ubicado en Villa de Leyva, como en la actualidad por la ASASAC, la Universidad Nacional de Colombia, la Universidad Sergio Arboleda entre otros.

1. CAPÍTULO: ASPECTOS PRELIMINARES

La constante reflexión a la que se somete un proceso de enseñanza y de aprendizaje, permite vislumbrar las dificultades por las que pasa un estudiante en el momento de construir conocimiento, teniendo en cuenta sus experiencias previas para enfrentarse a un nuevo objeto matemático. En este capítulo se pretende mostrar los cimientos que genera la formación de este proyecto de investigación, basados en una pregunta que surge a partir de la tensión entre la teoría que esta remitida a la importancia de incluir al estudiante en un entorno o contexto próximo y algunos problemas de una educación descontextualizada.

1.1. Antecedentes

Para abordar el planteamiento del problema de investigación y posteriormente la pregunta, se hace necesario una búsqueda de trabajos de investigación en los que se enfoque la enseñanza de las matemáticas a partir de la astronomía, resaltando el hecho que es el principal campo de acción y por tanto el primer paso para el planteamiento de un escenario que conlleve a una reflexión entre lo que se ha propuesto en el campo de la educación matemática desde la teoría y lo que sucede en la práctica.

Aunque la astronomía es una ciencia tan antigua como las mismas matemáticas y ya se ha hecho mención de la relación de la una con la otra, se han encontrado poco trabajo de la incursión de la astronomía dentro de la enseñanza matemática para fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométrica y de algunos conceptos de geometría. Por tanto el primer punto de búsqueda es la universidad Francisco José de Caldas, encontrando dos trabajos de grado encaminadas en la enseñanza de la trigonometría, por medio de la astronomía.

Por una parte Forero, P, Morales, G, Beltran, T, & Arenas, T (2005), hacen un trabajo en modalidad de pasantía de co-investigación con el grupo de investigación MESCUD en torno a los conceptos que originaron la trigonometría y las secciones cónicas, a partir del análisis del trabajo de Ptolomeo el cual se encuentra plasmado en el *Almagesto*, que es un compendio de 8 libro en los que se estudia la bóveda celeste, ya que contiene el catálogo estelar más completo de la antigüedad que fue utilizado ampliamente por los

árabes y los europeos hasta la alta Edad media, y en el que se describen el sistema geocéntrico y el movimiento aparente de las estrellas y los planetas.

Dicho análisis lo realizan a partir de las proposiciones y procedimientos con carácter fuertemente geométrico, en los que se destaca el uso de los elementos de Euclides y del planteamiento de las funciones trigonométricas, utilizados para la ubicación de cuerpos celestes y modelar movimientos aparentes de los planetas.

A partir de esto hacen una relación con los programas de enseñanza, en donde su principal objetivo está encaminado a abordar dichos conceptos y la manera en que son llevados al aula de clase, ya sea desde el conocimiento del profesor o los libros de texto. Por tanto se remiten hacer un análisis de los programas de enseñanza de la trigonometría en un libro de texto, encontrando que no se hace mención del desarrollo histórico de las funciones trigonométricas y mucho menos la importancia que ha tenido la astronomía en dicho proceso como campo de acción de esta rama de las matemáticas. Asimismo un análisis de los contenidos que se trabajan en grado decimo en el colegio Restrepo Millán contrastándola con el hecho de trabajar una construcción histórico-epistemológica de la función por medio de la astronomía.

Entre los resultados obtenidos en este trabajo se destacan la discrepancia encontrada en cuanto a la enseñanza de la trigonometría y la importancia de trabajar esta desde una mirada histórico-epistemológico, en el que se le propone a los “estudiantes un gran trabajo algebraico y un mínimo desarrollo histórico y geométrico”.

Además el estudio de la trigonometría a partir de la astronomía, que se ejemplifica en el almagesto, como carácter histórico del tratamiento del objeto de estudio de la trigonometría como un medio contextualizador, en el que el estudiante como el docente encuentra una funcionalidad del objeto de estudio y múltiples aplicaciones del mismo, ya sea para medir distancias o determinar áreas, haciendo uso de dichos conocimientos matemáticos.

Por otra parte se tiene el trabajo realizado por Rincon Castillo (2008) trabajo que está enfatizado en generar una propuesta de enseñanza de las secciones cónicas a partir de la historia de la astronomía, con la implementación de una animación interactiva como

recurso didáctico, con el fin de lograr una dotación de significados en los estudiantes en torno a los procedimientos y conceptos matemáticos trabajados alrededor de la enseñanza de las secciones cónicas. Igualmente para que observen la importancia de las matemáticas como desarrollo histórico de la humanidad, a partir de la actividad social como la astronomía en la que se hace una interpretación de los fenómenos celestes que tanta inquietud ha generado a las diferentes culturas desde tiempo atrás y encuentre un aprendizaje más significativo de la matemática inmersa en un contexto de aplicación.

Lo que se resalta de este trabajo a parte del uso dado de la astronomía, en las que se hace un énfasis a los trabajos de Kepler en el desarrollo de sus tres leyes del universo, las cuales rompen con el paradigma del movimiento circular de los planetas por un movimiento eclíptico y reafirma la tesis de Copérnico de que el centro del universo es el Sol y no la tierra como se venía trabajando. Y a partir del análisis histórico-epistemológico de la noción de las funciones cónicas diseña una animación interactiva, en la que se muestra el uso de las secciones cónicas por medio de gráficas, para que el estudiante pueda observar y analizar el comportamiento de las diferentes funciones cónicas, de las diferentes ecuaciones que las generan y la manera de graficarlas.

Uno de los resultados que se destacan es el uso de un análisis histórico-epistemológico de las funciones cónicas para la generación de una animación interactiva y de permitir observar el desarrollo y la importación de dichas funciones dentro del avance tanto de la astronomía como de las mismas matemáticas.

Relacionando estos trabajos es importante destacar que se han elaborado para un nivel de educación media en donde se lleva a cabo la enseñanza de las funciones tanto trigonométricas como cónicas, es decir aplicables en los estudiantes de bachillerato. Pero la astronomía no es de uso exclusivo de los grados superiores ya que Rincon (2009) desarrolla una unidad didáctica, en la que hace una propuesta para trabajar las magnitudes por medio de la astronomía, para grados tercero, cuarto y quinto pues era un aula integrada. Para ello tuvo en cuenta definiciones preliminares de las magnitudes de tiempo, longitud y peso para construcción del concepto por medio de la interacción con las distancias y las formas de los diferentes cuerpos celestes, trabajando unidades de medida.

De esta manera se muestra un ejemplo de la aplicación que tiene la enseñanza de objetos matemáticos por medio de la astronomía en primaria, logrando así la efectividad de esta ciencia como instrumento didáctico para impulsar el aprendizaje de las matemáticas por medio de la astronomía y asimismo desarrollando el uso de la modelación como interpretación de las diferentes unidades de medida utilizadas y sus instrumentos de medición, formando así la noción de magnitud en los niños.

Por otra parte en la maestría de enseñanza de las ciencias naturales y exactas, de la Universidad Nacional de Colombia, se encontró un trabajo de grado encaminado a la enseñanza de las matemáticas a través de la astronomía, cuyo objetivo general está dirigido al diseño de una serie de actividades con nociones básicas de Astronomía en la que se expliciten interrelaciones con temas de matemáticas para grado sexto.

Lo relevante del trabajo realizado es el uso de elementos de astronomía accesible a los estudiantes, como por ejemplo la ubicación de cuerpos celestes a partir de coordenadas horarias y horizontales, el movimiento que realiza el Sol durante el día, las magnitudes aparentes y absolutas de las estrellas, las distancias y medidas astronómicas, abarcando temáticas de matemáticas como unidades de medida, fracciones, ángulos, toma y análisis de datos. Resaltando esa relación que existe entre la ciencia astronómica y al enseñanza de las matemáticas, por medio del planteamiento de una secuencia de actividades en la que los estudiantes tiene un papel activo dentro de la construcción de conocimiento.

La metodología empleada por Cárdenas Cubides (2011) en este trabajo quien es licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica de Colombia, está encaminada al desarrollo de las actividades dentro de la clase y al rol de los estudiantes y el profesor, sin dar evidencia directa del método de investigación utilizado y la forma de analizar y recolectar la información, pero se destaca un énfasis en la enseñanza de la ciencias en donde se relacionan la matemática y la astronomía. En palabras de la autora:

La metodología implícita en esta propuesta pretende que el estudiante actúe, construya, modifique, reoriente, analice, escriba, hable, escuche, lea, etc. en forma individual y colectiva. Donde el docente promueva y oriente los procesos para que los anteriores aspectos se vivan y se den en la práctica, se materialicen en el proceso de construir, transformar y renovar conocimientos, pues éste permite

desarrollar los aprendizajes contextualizados y significativos de los estudiantes y posibilita la integración, participación activa del docente, además, pasa de considerar al currículo como un sistema articulado de objetivos, contenidos, métodos y evaluación a considerarlo un campo de significación de la actividad curricular. (pp. 27)

Por otra parte se resalta una de las conclusiones a las que se llegó en el trabajo; “mediante el estudio de nociones básicas de astronomía logré establecer relaciones entre algunas de sus temáticas con las matemáticas, con el fin de diseñar y adecuar actividades propias de la astronomía con un trabajo explícito de matemáticas para estudiantes de grado Sexto” (pp. 46). Lo que permite observar esa interdisciplinariedad con que cuentan las matemáticas y su fuerte influencia en otras áreas del conocimiento en especial en el estudio de la ciencia astronómica que puede ser empleada tanto para incentivar a los niños en la observación de la bóveda celeste, como para permitir que la enseñanza de las matemáticas salga de su esfera de cristal en las que han sido encerradas y contextualizar el conocimiento puesto en juego dentro del aula de clase para que sea más significativo su aprendizaje para los estudiantes.

Asimismo en el departamento de matemáticas de la Universidad de Minho en Brasil, se realizó un proyecto de trabajo por Isabel, Manuela, & Cristina (2007), en el que muestran un enfoque netamente matemático relacionado directamente con la observación y comportamiento de cuerpos celestes a partir de la mecánica de Newton y del álgebra lineal y geometría analítica para el estudio y la transformación de coordenadas celestes, de esta manera se ejemplifica otra relación entre matemáticas y astronomía.

En este trabajo realizan una propuesta para la enseñanza de las matemáticas, a través de una serie de actividades enfatizadas a la aplicación de algunas temáticas, como por ejemplo; ángulos con centro en una circunferencia, arco de circunferencia, la mediatriz de una recta, funciones trigonométricas, ecuaciones de primer grado con una incógnita, ángulos internos, ángulos alternos entre otros, en donde a partir de la construcción de un astrolabio que es un instrumento para localizar estrellas, por medio de medidas en grados conocido como coordenadas horizontales usadas por astrónomos aficionados, generan una serie de actividades haciendo uso de este instrumento y por supuesto de la bóveda celeste, además de identificar la latitud y longitud que son las líneas imaginarias de la

tierra y utilizar el proceso realizado por Eratóstenes en el siglo IV a. C. para medir la circunferencia de la tierra.

Lo notable de este trabajo a parte del hecho de trabajar la enseñanza matemática por medio de la astronomía, es la importancia que le dan a esta ciencia como componente transversal de las diferentes áreas del conocimiento, "*la astronomía es una ciencia con un fuerte componente interdisciplinario*". Esta relación con otras áreas del conocimiento se torna particularmente adecuada para proponer el tema de posibles actividades a desarrollar en las escuelas (en enseñanza básica como en enseñanza secundaria). La astronomía está fuertemente relacionada con áreas como la física, las matemáticas, la geografía, la química, la informática, la geología, la biología, entre otras

Asimismo se menciona la pertinencia que tiene la astronomía porque muchos estudiantes se sienten atraídos por el estudio de ésta; por lo tanto, el uso de cuestiones y problemas de Astronomía en la educación permite a los maestros tomar ventaja de la fascinación natural de los estudiantes en esta área.

Además del uso de la astronomía dentro del conocimiento científico teniendo en cuenta desertificación del estudio de la ciencia, en muchos países de Europa y en Estados Unidos, un ejemplo de ésta es el proyecto de gran éxito (Science Through its Astronomical Root) de los Estados Unidos de América. De esta manera se resalta el estudio de la astronomía para la enseñanza de varias áreas del conocimiento científico entre las que se resaltan las matemáticas.

Aunque el estudio de la astronomía ha sido una constante a través de la historia, en la actualidad está tiene un fuerte auge en varios países de Latinoamérica, como por ejemplo en Chile en donde se construyó uno de los observatorios más grandes de Latinoamérica, en Brasil, en Venezuela entre otros. También en Colombia el estudio de la astronomía ha estado presente, en los observatorios de la universidad Nacional presentando un libro llamado astronomía para todos (2001), en el que se encuentra que el desarrollo de la astronomía tuvo origen a través del estudio de fenómenos visibles a la vista humana, en donde se relacionaba algunos de estos con supersticiones y predicciones de acontecimientos futuros o con algunos comportamientos de las personas, con la estipulación de calendarios para la recolección de las cosechas, para estipular el tiempo y

principalmente para saber que eran esos cuerpos luminosos que se observaban al caer la noche, vinculando esto a una práctica social para explicar el mundo en el que vivimos en el capítulo IV referente a la arqueo-astronomía.

La universidad Sergio Arboleda, en donde trabaja el director de la ASASAC llamado Raúl Joya, el planetario distrital cuyo director es German Puerta y el programa presentado por la biblioteca Luis Ángel Arango llamado las ciencias no muerden, por citar algunos casos del capital del país. Por tal motivo la ciencia astronomía, ha despertado el interés en muchos colegios por su enseñanza, formando grupos de estudio de esta ciencia, en donde se resalta el grupo Apolo del Instituto Educativo Distrital Molinos y Marruecos, quienes han participado en varias actividades y encuentros de divulgación del estudio de esta ciencia.

En consecuencia surge el planteamiento de este trabajo en donde se resalta el estudio de la bóveda celeste por medio de la matemática, específicamente la trigonometría plana para ubicación de cuerpos astrales como medio de contextualización y uso del conocimiento adquirido por estudiantes de décimo grado de educación media. Dirigido para el municipio de Villa de Leyva por su ubicación espacial y por el observatorio astronómico Muisca, conocido como el infiernito o el parque arqueológico Monquirá, hacen de éste un lugar especial para el estudio de la astronomía y por tanto como eje contextualizado para la enseñanza de las matemáticas.

1.2. Planteamiento del problema

Para los años 90 en Colombia se despertó un interés o más bien una preocupación por la calidad de la educación y las altas tasas de analfabetismo, preocupación mencionada por la misión de Ciencia, Educación y Desarrollo (1994) “En Colombia la tasa de analfabetismo es del 13% (sin incluir el analfabetismo funcional)...”, (pp. 33). A lo que se sumó la desescolarización y el fracaso escolar, además del atraso tecnológico y falta de generación de propuestas para el avance científico “Sólo el 1% de los científicos del mundo son latinoamericanos, y de éstos sólo el 1% son colombianos”, (pp. 37). Sumiendo al país en un estancamiento en materia de desarrollo económico. A partir de esto se propone una reestructuración a nivel educativo con la ley 115 de Educación General y la generación de los lineamientos curriculares nacionales por parte del Ministerio Nacional de

Educación, dándole otro enfoque a la enseñanza de las ciencias en donde el estudiante tiene un papel más activo en su propia formación y en la construcción de conocimiento, por tanto existe una relación más estrecha entre el conocimiento, el profesor y el estudiante.

Situando la mirada en los lineamientos curriculares de matemáticas, donde se fundamenta el diseño de currículos en esta área, cabe destacar que parten de la naturaleza de las matemáticas en el ¿Qué son las matemáticas? ¿Qué es el quehacer matemático? Desde este enfoque:

El MEN (1998) afirma

Las consideraciones hechas anteriormente acerca de la naturaleza de las matemáticas, del quehacer matemático en la escuela, las justificaciones para aprender y enseñar matemáticas, los procesos que los niños siguen al aprender, y las relaciones de la matemática con la cultura, son elementos para tener en cuenta a la hora de proponer una estructura curricular del área al igual que su articulación con otras disciplinas en el proyecto educativo institucionales. (pp. 18)

Además presentan unos elementos primordiales para la enseñanza de las matemáticas como: el contexto, los contenidos y los procesos matemáticos y tener en cuenta el eje transversal en donde existe un vínculo de las demás ciencias y la cultura con la misma.

Desde esta perspectiva en los Lineamientos se hace énfasis en el uso del contexto y de la realidad inmediata del estudiante para el planteamiento de situaciones problema, en la que los estudiantes buscan y le dan un sentido al estudio de las matemáticas por medio de la interpretación de la realidad por medio de la modelación de situaciones, por tanto

El MEN (1998) afirma

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problema procedentes de la vida diaria, de la matemática y de las otras ciencias en el contexto más propicio para poner en práctica el conocimiento activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas (pp. 24).

De esta manera varios autores plantean aspectos que se deben tener en cuenta para el diseño de actividades dentro del aula de clase, remitiéndose a Miguel De Guzman, (2007)

que plantea la enseñanza de las ciencias en la que se encuentra la misma matemática, a través de situaciones problema llevadas al aula de clase del contexto del estudiante, existiendo una relación entre el aprendizaje de las ciencias y el medio externo, en una interacción entre ciencia, técnica y sociedad. En la que los estudiantes se convierten en entes activos que motivados por la Solución de las diferentes situaciones por medio de razonamientos basados en la búsqueda de evidencias, en hipótesis, en fundamentos rigurosos que generan modelos que someten a prueba la hipótesis para concebir conclusiones generales, conlleva a la construcción de conocimiento significativo.

Asimismo, dichas situaciones problema se pueden presentar como una situación fundamental, de la que desencadenan una serie de pequeñas situaciones didácticas y a-didácticas que al ser ejecutadas por medio de unas fases (acción, validación, formulación e institucionalización), conllevan a la Solución de la situación fundamental y a la construcción de conocimiento por parte del estudiante, por ende es necesario que dicha situación fundamental este ligada con el contexto del estudiante, con las demás ciencias y con los intereses del mismo, ya que se puede convertir en algo tedioso e infructífero para el estudiante. (Brousseau, 1986).

Es por esto que para Cantoral (2001) las características propias para el desarrollo de un aprendizaje significativo en la educación media y en el caso de la función en particular, el desarrollo de la noción de función trigonométrica como la generalización de las funciones trigonométricas, deben estar enmarcadas dentro de situaciones que permitan al estudiante construir conocimiento. Asimismo Tall (1988) y LEBEM (1999), afirman que es difícil especificar una lista de atributos que diferencien o caractericen el pensamiento matemático avanzado (**P.M.A**), entendiendo por esta definición, pensar los problemas desde la postura de un matemático experto y analizando el proceso que se desarrolla durante el transcurso del solucionar un problema. Pero si es importante ver los contenidos que en ellos se explica por ejemplo la representación de la función como relación de dos variables, que se relaciona con un contexto.

Por otro lado Jonassen (2000) presenta la importancia de generar situaciones problema o problemas para el aprendizaje significativo de un objeto de estudio a partir del modelo para el diseño de ambientes constructivistas que enfatiza el papel del estudiante en la construcción de conocimiento, para esto la formulación debe tener presente tres elementos fundamentales para la creación de una situación problemática:

1. Contexto del problema
2. Representación o simulación del problema
3. El espacio de manipulación

Este modelo tiene dos formas de desarrollo: la modelación del comportamiento a realizar de manera abierta y modelar los procesos cognitivos de manera encubierta. El entrenamiento es un proceso motivacional para el estudiante, analizando su funcionamiento, y otorgando retroalimentación en el mismo, ayudándole a desarrollar habilidades clave (motivación, provocación, interés). (Jonassen, 2000).

Paralelamente Bishop (1999), resalta el hecho que la matemática surge a partir de las prácticas sociales y la solución a las necesidades específicas del hombre, critica ampliamente la educación matemática descontextualizada, pues para él, este tipo de educación produce un aprendizaje impersonal, en el cual el estudiante no se esfuerza por obtener significados personales, desestimulando el aprendizaje de los estudiantes, y por tanto, parte del fracaso en la matemática escolar. De igual forma, el autor concibe la educación matemática, como un *proceso social*, es decir que la enseñanza de la matemática debe ser contextualizada.

Teniendo en cuenta esto, Bolaños Muriel (S. f.) Los Docentes de El Centro Educativo La Cañada, ubicado en la zona rural del municipio de San Pablo, departamento de Nariño, en los últimos años han detectado notorias deficiencias en los estudiantes ligadas al aprendizaje del área de las matemáticas, debido a la falta de recursos didácticos que permitan la contextualización de conceptos y contenidos y un apropiado ambiente del clase en el quehacer matemático. Falta que se manifiesta por otra parte a su carácter rural, ya que presenta también niveles de deficiencia en el conocimiento, manejo y aplicación de las Tecnologías de la información y la Comunicación como herramientas innovadoras y dinamizadoras en el que hacer pedagógico.

Uno de los actores fundamentales en el proceso educativo es el docente quien asume, no siempre con conciencia, la responsabilidad de ser transmisor y creador de valores culturales, homogeneizador del lenguaje, definidor de roles sociales y constructor de relaciones y redes sociales. “En relación con la deserción escolar, el docente puede influir sobre la decisión de los estudiantes de continuar en la escuela, más aún si se tiene en

cuenta que el desinterés explica cerca del 20% de las razones para abandonar los estudios” (Contraloría General de la Nación , S. f., pág. 9). Asimismo La crisis de la enseñanza en la educación secundaria alcanza en este momento a la mayoría de los países, especialmente en las áreas de ciencias (Fourez, 1999, 2002). (Jordi, Rosa, & Carles., S. f.).

De acuerdo a lo anterior, cabe resaltar que el contexto se puede ver como cultura y como el contexto hace parte del proceso matemático de un estudiante, luego la matemática tendría una vinculación transitiva con la cultura.

Es Colombia, un país diversamente cultural, por su origen histórico del mestizaje de los pueblos indígenas con la influencia de los conquistadores españoles y europeos, y como consecuencia de su riqueza geográfica, posee unos entornos o espacios que permiten un desarrollo del aprendizaje a partir de las situaciones contextuales. (Ver figura 1).



Figura 1. Monolitos alineados en el calendario solar muisca.

Dando un enfoque en la ciencia, y en particular en el campo de la astronomía que posee un gran fundamento en las matemáticas y en la física, se recalca el hecho de que ésta surgió como una ciencia de estudio de interés práctico de las personas de la antigüedad. (Izquierdo, 2008). En Colombia el desarrollo de la astronomía ha tenido un papel importante, por ejemplo, la cultura Muisca que se ubicó en Villa de Leyva, Boyacá, dio origen a un lugar llamado “el infiernito”, en el cual se destaca la importancia del uso del calendario Solar, para el estudio de la astronomía.

En el infiernito, dada su condición geográfica y la posición de los monolitos permite estudiar fenómenos astronómicos, que sirvió para determinar acontecimientos de la cultura muisca, de esta manera la observación de la bóveda celeste influía en su contexto. Sería un sitio donde se pueda generar situaciones didácticas a partir de la observación y la ubicación de cuerpos celestes para generar significados en el aprendizaje de la matemática, así como el uso que le dieron los Muisca a su calendario Solar. (Silva, 1981).

Por consiguiente e incidiendo en las principales ideas ya mencionadas; existe un contexto en Villa de Leyva, con una riqueza cultural, que ayuda a la modelación de situaciones por medio de los elementos astronómicos del sector, donde se presenta un alto contenido matemático. Dicho contexto genera situaciones problemas ayudando a que los estudiantes se interesen por otra ciencia y al mismo tiempo generen ambientes propicios de construcción de conocimiento. Por tal motivo y moviéndose con la idea de contextualizar los procesos de enseñanza de las matemáticas y de llevar un lugar como el observatorio astronómico muisca al aula de clase surge la siguiente pregunta.

1.3. Pregunta de investigación

¿Qué aspectos matemáticos, didácticos y de contexto (astronómico) se pueden considerar en el diseño Ara Solis como dispositivo didáctico que permita la construcción de las funciones trigonométricas para la ubicación de cuerpos celestes, con base en los diseños y registros astronómicos que los Muisca dejaron establecidos en el (hoy denominado) Parque Arqueológico de Monquirá – Boyacá?

1.4. Objetivos

General

- Identificar aspectos matemáticos, didácticos y de contexto para el diseño «Ara Solis», como dispositivo didáctico, para los estudiantes de grado décimo, que permita la construcción de las funciones trigonométricas, para la ubicación de cuerpos celestes

con base en los diseños y registros astronómicos que los Muisca dejaron establecidos en el (hoy denominado) Parque Arqueológico de Monquirá – Boyacá.

Específicos

- Identificar los fenómenos celestes que se registraron por medio de las figuras fállicas en el observatorio astronómico de Monquirá.
- Registrar por medio de modelos matemáticos la manera en que se establecieron los monolitos para la ubicación de cuerpos celestes, haciendo uso de la geometría y de las funciones trigonométricas.
- Definir por medio del marco legal (estándares curriculares), didáctico y el uso de la tecnología, los elementos para un proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula en la educación media.
- Diseñar el dispositivo didáctico por medio de la transposición entre lo matemático, lo astronómico y el medio educativo, que sirva como contexto en la educación media para la construcción de funciones trigonométricas.

1.5. Justificación

El avance de la ciencia siempre ha ido de la mano con la participación del hombre de una manera directa en su contexto, ya sea para *solucionar problemáticas*, por gusto o por la curiosidad que suscitan algunos fenómenos de la naturaleza, desarrollando interpretaciones e hipótesis que generan una comprensión de la realidad. De esta manera las matemáticas tuvieron un desarrollo impresionante en culturas como la Egipcia, la Babilónica, la Griega y las culturas nativas del “nuevo mundo” en las que se resaltan, la cultura Maya, Inca y Muisca solo por mencionar algunos casos. (Boyer, 1986)

Entre los fenómenos observables se resalta el estudio de la bóveda celeste en las diferentes culturas mencionadas con anterioridad, como un elemento común en el desarrollo de esta ciencia, que se relaciona con la cultura y las actividades cotidianas de las personas y que tiene gran influencia en las creencias y costumbres, como fiestas y rituales. (Izquierdo, 2008). En relación con algunas constelaciones y el movimiento

identificado con la salida y puesta del Sol en determinadas fechas del año denominadas solsticios y equinoccios.

Dicho desarrollo de la ciencia astronómica está fundamentado en la matemática y en la física, rodeado de un halo con carácter místico y mitológico, que dota de gran interés la observación del cielo, cuya evidencia se encuentra plasmada en trabajos como el *Almagesto* de Ptolomeo y construcciones arquitectónicas como las pirámides de Egipto, Stonehenge, los Rapa Nui, Machu Pichu, las pirámides de la cultura Maya y para remitirse a un caso de Colombia; el parque arqueológico de San Agustín. (Izquierdo, 2008).

Dentro del fundamento matemático, inicialmente se usó como hace alusión Dorce (2006) la geometría para la ubicación de cuerpos celestes, para hallar áreas, determinar volúmenes, distancias entre otros, resaltándose de esta forma el trabajo realizado por Ptolomeo en el *Almagesto*; a través del uso de la geometría determina el movimientos aparentes de los planetas en un sistema geocéntrico en el que el Sol, la Luna y los planetas giraban alrededor de la Tierra en círculos epicíclicos, además del descubrimiento de más 43 constelaciones, en donde se evidencia un trabajo con geometría plana y más específicamente con los elementos de Euclides. Asimismo la trigonometría para calcular distancias inaccesibles para las personas, por ejemplo, la distancia entre la tierra y el Sol considerada hoy día como una unidad astronómica, la distancia entre la tierra y alguna estrella, la longitud de la circunferencia de la tierra.

Paralelamente hacia los siglos XV y XVI los avances que ha tenido esta ciencia con los trabajos de Copérnico y Kepler tienen un gran fundamento matemático, como es el uso de las secciones cónicas para determinar el movimiento de los cuerpos celestes como por ejemplo los planetarios, proponiendo un modelo heliocéntrico del universo en el cual el Sol es el centro y los planetas giran alrededor de éste con un movimiento eclíptico, rompiendo el paradigma geocéntrico y del movimiento circular de los planetas trabajado por más de 15 siglos. (Sagan, 1985)

Ahora bien adentrándonos en la enseñanza de las matemáticas y tomando como referencia a Bishop (2005), en donde nos remite a tres aspectos fundamentales dentro del aula de clase las cuales son; las actividades en matemáticas, la negociación y la comunicación en el que se presenta una interacción entre estos aspectos que ayudan a

generar significados en los estudiantes en torno al aprendizaje de las matemáticas. Igualmente Miguel De Guzman (2007), plantea que la enseñanza de las ciencias en la que se encuentra la misma matemática, a través de situaciones problema llevadas al aula de clase, del contexto del estudiante, genera una relación entre el aprendizaje de las ciencias y el medio externo. En la interacción de ciencia, técnica y sociedad.

Resaltando que la astronomía surge a partir de las prácticas sociales en la constante observación del cielo y en la necesidad de las personas por marcar algunos periodos de tiempo de gran importancia para la sociedad, que se observan en el movimiento aparente del Sol sobre el horizonte. Esto ha generado una serie de hipótesis y teorías intentando explicar dichos fenómenos pues según Silva Calderon & Baquero (2009) Al fin que el todo, la astronomía busca entender el universo, el lugar en que habitamos los seres humanos. Asimismo y de acuerdo con Zimmermann (1981) todo estudiante debería llegar a saber a lo largo de sus años escolares, por ejemplo, algo sobre las causas del día y de la noche y del cambio de las estaciones del año, sobre las causas del cambio de fase de la Luna y sobre el origen de los eclipses o de fenómenos astronómicos visibles parecidos.

Por tanto la enseñanza de la astronomía en la escuela tiene un papel importante ya que está relacionada con fenómenos observables en el cielo, en donde los estudiantes despiertan curiosidad por acercarse al conocimiento del porqué de estos fenómenos.

Por consiguiente el uso de la astronomía enmarcado en un contenido matemático para el desarrollo de “*Ara Solis*” una dispositivo didáctico, tiene como objetivo generar situaciones de aprendizaje ejemplificado en los fundamentos de la trigonometría plana en la ubicación de cuerpos celestes, nos remite a la existencia de una relación entre los tres aspectos fundamentales Mencionados por Bishop (2005) y Miguel De Guzman (2007) hace referencia para la enseñanza matemática, dicha idea es significativa para las decisiones del profesor previas a la clase, por cuanto esté ya no piensa en cómo va presentar el contenido durante la clase sino que hacer la conversión didáctica del contenido y del conocimiento matemáticos a las actividades matemáticas adecuadas para los estudiantes.

De esta manera se hace un énfasis en la riqueza astronómica presente en el municipio de Villa de Leyva, que cuenta con varios observatorios, con el festival anual de astronomía, con una posición geográfica y climática propicia y con la estructura arqueológica conocida

como el observatorio Solar (el infiernito) por el antropólogo Celis Eliecer Silva. Por tanto se muestran elementos del uso de la astronomía como contexto en el planteamiento de situaciones problema para generar un aprendizaje de las matemáticas más significativo haciendo uso de la trigonometría plana en las diferentes situaciones, por medio de un instrumento didáctico “Ara Solis”.

2. CAPITULO: DESARROLLO METODOLÓGICO.

Para enmarcar el proceso de desarrollo que tiene la investigación se hace necesario especificar un plan de trabajo que se desenvuelva en torno a una metodología de investigación, que permite organizar el trabajo a partir de unas fases y recolectar y analizar la información por medio de unas categorías, para llegar a dar solución a la pregunta de investigación y el diseño del dispositivo didáctico, de este manera aportar con una propuesta al gran campo de la educación matemática y a la misma formación docente.

2.1. Tipo de investigación.

Teniendo en cuenta lo que se pretende dar a conocer en esta monografía, que está en marcada en el estudio de los registros astronómicos dejados en el observatorio Muisca de Monquirá (el infiernito), a través de modelos matemáticos orientados desde la geometría y la trigonometría plana (funciones trigonométricas), para relacionar un marco matemático dentro de un contexto astronómico por medio de una animación (dispositivo didáctico Ara Solis). Y de esta manera hacer una trasposición basados en los estándares curriculares de matemáticas para la enseñanza de la trigonometría en estudiantes de grado décimo profundizando en la comprensión y uso de la geometría y de las función trigonométricas, resaltando el hecho que la bóveda celeste hace parte del contexto de los estudiantes y que para acceder a ella vasta con levantar la mirada al cielo, además de los diferentes software de libre acceso como Stellarium y Celestia acercándose de este manera algunos de los misterios (movimiento y ubicación de cuerpos celestes) del universo.

Pues este trabajo tiene un enfoque netamente teórico y que no tiene contacto directo con una población, aunque está dirigida a la comunidad educativa, llevó a una búsqueda de un tipo de investigación que esté ligado con un trabajo de esta naturaleza, cotejando diferentes metodologías de trabajo y enmarcando una ruta que este en consonancia con la forma más adecuada de recolectar información para el diseño del dispositivo didáctico.

Por tal motivo el tipo de investigación más adecuado para el desarrollo de esta monografía, es la investigación documental, siguiendo a Jurado (2002) el énfasis de la investigación está en el análisis teórico y conceptual hasta el paso final de la elaboración

de un informe o propuesta sobre el material registrado, ya se trate de obras, investigaciones anteriores, material inédito, hemerográfico, cartas, historias de vida, documentos legales e inclusive material filmado o grabado

Desde esta perspectiva dicha búsqueda de información desde el análisis teórico, está enfocado en el escrutinio de los aspectos matemáticos, didácticos y de contexto que permitan el diseño del dispositivo didáctico como muestra final.

La investigación documental además se caracteriza, por estar basados en las investigaciones científicas que “tienen raíces antiguas que se remontan a las contribuciones precolombinas en astronomía y botánica medicinal. Las monumentales construcciones que aún se conservan son testimonios fehacientes de importantes desarrollos en ingeniería y arquitectura” (Garduño, L, Aranda, P, Hernández, & Wilebardo., 2004, pp. 92).

De esta manera se encontró otra relación con la investigación y teniendo en cuenta los diferentes trabajos realizados en el observatorio astronómico Muisca como por ejemplo los del antropólogo Silva Celis y El grupo de investigación geo topo de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, integrado en parte por docentes del programa Tecnología en Topografía e Ingeniería Topográfica de la Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales, trabaja en la línea comprobaciones topográficas, en el área de la Arqueoastronomía y toma como tema vestigios indígenas para comprobar la hipótesis que relaciona al lugar con los inicios de la astronomía observacional. Por tanto se toma como base trabajos realizados dentro de la teoría de la naturaleza arqueo-astronómica, además del trabajo experimental del lugar, para comprobar desde la propia experiencia lo que se ha venido afirmando de dicho lugar y si es posible generar alguna hipótesis de la ubicación astronómica de las figuras líticas, diferentes a los equinoccios y solsticios.

Por tanto dentro de las fases que se trabajan dentro de la metodología de investigación resaltando que es el proceso ordenado y lógico, de pasos para realizar una investigación documental sobre algún problema que nos inquiete, interese o preocupe, cuyos resultados serán de validez científica (Garduño López, Aranda Pastrana, Hernández, & Wilebardo., 2004) y en este caso dentro de un contexto educativo.

Fase 1. Elección del tema y Acopio de bibliografía básica sobre el tema: Esta fase se resume en el capítulo 1 de la monografía, en el cual se explica de donde nace la idea de la investigación, además de la primera recolección de información definida en los antecedentes y el planteamiento del problema y pregunta de investigación.

Fase 2. Análisis de fuentes: La primera búsqueda de información estuvo enmarcada en la incidencia de la astronomía en la educación y más específicamente en la educación matemática, indagando en trabajos de grado (tesis) y unidades didácticas que son el resultado final de un trabajo de un semestre en las prácticas en instituciones educativas distritales y que se elaboran desde cuarto semestre en el proyecto curricular LEBEM de la Universidad Distrital. Asimismo en la incidencia de la astronomía en grupos de estudio y de observatorios que permitieron recolectar información para la elaboración del dispositivo, además de un primer acercamiento con el parque arqueológico de Monquirá, evidenciado en fotografías que brindan una primera idea de cómo diseñar Ara Solis.

Fase 3. Delimitación del tema y Elaboración del esquema de trabajo: Uno de los problemas para la elaboración del dispositivo fue la delimitación del tema, resaltando el hecho que la astronomía y su relación con la matemática tiene un campo tan extenso, de una diversidad de conocimientos y asimismo de complejidad que siempre costo trabajo delimitar el tema, además de la selección de la población a la que se pretendía dirigir la investigación. Pero después de las diferentes lecturas y de enfocar lo que se quería trabajar, el tema se delimito a la **ubicación de estrellas en el campo de la astronomía, por medio de la geometría y las funciones trigonométricas** y de esta manera la población también se delimito, para ser dirigidas para estudiantes de grado décimo aunque más adelante se profundizará en esto.

Paralelamente esta delimitación también se enfocó en el estudio de la ubicación de cuerpos celestes con base en los diseños y registros astronómicos que los Muisca dejaron establecidos en el (hoy denominado) Parque Arqueológico de Monquirá; que fue el que nos dio la idea de llevar dicho conocimiento al aula de clases como contexto para los estudiantes por medio del dispositivo didáctico.

Después de haber delimitado el tema, se realizó un esquema de trabajo como ruta para llegar a la solución de la pregunta de investigación y al diseño del dispositivo didáctico,

dicho esquema se enfocó en la elaboración de la tabla de contenido de la monografía, que a medida en que se avanzaba en la búsqueda de información se fue reestructurando dicha tabla.

Fase 4. Trasposición entre los componentes matemáticos y astronómicos, al plano didáctico en cuanto la construcción de la función trigonométrica: Posteriormente ya habiendo delimitado el tema y habiendo especificado un ruta de trabajo, la consultas apuntaron a identificar que conocimientos matemáticos se tuvieron en cuenta para la ubicación de las figuras líticas desde la geometría y la trigonometría (funciones trigonométricas), en donde se resalta un discernimiento en la observación de la bóveda celeste en cuanto a posición y movimiento de astros, y hacer el análisis en el observatorio muisca.

Sin olvidar la trasposición al plano educativo, teniendo en cuenta la parte legal, didáctica y de la incidencia de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de grado décimo.

Fase 5. Protocolo de construcción de Ara Solis teniendo en cuenta elementos astronómicos, matemáticos y didácticos: Para la organización de la búsqueda y recolección de información se realizó una búsqueda de información ordenada de acuerdo a las temáticas, de la siguiente manera:

- Las ideas más importantes, que permitían vislumbrar Ara Solis.
- Las ideas de los autores y las propias reflexiones y comentarios, de esta manera se imprimió orden y coherencia al mismo.
- El fácil manejo de datos e ideas ajenas o propias.
- Acercarse a la elaboración de un primer borrador del trabajo final.

Dichas temáticas reestructuraban el esquema de trabajo a medida que se consultaba tanto textos como personas que nos orientaban el trabajo de investigación, siempre centrando la idea en fundamental en el diseño de un dispositivo didáctico, en el estudio del observatorio astronómico como eje central, representado por la parte astronómica, matemática y de la educación. Lo que permitió la construcción del dispositivo que está enmarcado en el protocolo de construcción de Ara Solis, En los que se evidencia la flexibilidad del objeto de estudio resaltando el hecho de llevar la observación de la bóveda

celeste plasmado en las figuras líticas como contexto para el estudiante en un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Fase 6. Redacción del trabajo final:

Teniendo en cuenta el proceso en la búsqueda de información del marco teórico y la constante organización de la bibliografía por medio de las temáticas, se hizo una última organización que permitiera, manejar la información necesaria para la estipulación y selección de los elementos matemáticos, didácticos y de contexto astronómico, para la construcción del dispositivo didáctico y la redacción final de la monografía.

2.1.1. Población.

Esta monografía, está constituida por tres componentes los cuales giran en torno a la educación matemática, encaminados desde un trabajo fundamentado nociones matemáticas de los fenómenos celestes que se encuentran relacionados con la ubicación de los monolitos en el Observatorio Astronómico Muisca, por medio de la geometría y de la trigonometría hasta el diseño de la dispositivo didáctico Ara Solis para la enseñanza de las funciones trigonométricas.

Desde esta perspectiva la población a la que se dirigió la tesis son estudiantes de grado décimo, ya que están comenzando sus estudios de trigonometría, y por su carácter geométrico permite un análisis del trabajo con triángulos para acceder a distancias que el hombre apenas puede concebir, en la ubicación y el seguimiento del movimiento de astros.

Además se pretende que el dispositivo pueda ser trabajado por todo docente que le pueda dar un uso, para cualquier grado de escolaridad, por tanto desde esta perspectiva este trabajo está dirigido también para profesores y estudiantes para profesor de matemáticas que estén haciendo sus prácticas o que pretendan evidenciar algún saber y que lo puedan manifestar a través *Ara Solis*.

2.1.2. Instrumentos de recolección de información

Después de haber estipulado la metodología de investigación y la población a la cual está dirigido el presente trabajo, se debe resaltar el hecho que el dispositivo didáctico Ara Solis es una propuesta para utilizar la astronomía como contexto para la enseñanza de contenidos matemáticos y NO una secuencia de actividades a modo de una unidad didáctica. Por tal motivo el trabajo pasó por diferentes fases, desde la recolección de información hasta el diseño y aplicación de una prueba piloto para llegar al diseño de una actividad en donde se evidencie fortalezas y debilidades del dispositivo didáctico. Como se ejemplifica en el siguiente cuadro.

DESARROLLO METODOLÓGICO					
Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
<ol style="list-style-type: none"> 1. Elección del tema 2. Acopio de bibliografía 3. Revisión estándares 4. Estudios de la trigonometría 5. Currículo y Astronomía <p>Instrumentos Análisis de contenido</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Análisis de fuentes 2. Relación de astronomía y educación de las matemáticas. 3. Visita al observatorio muisca <p>Instrumentos Análisis de contenido Fotografías</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Delimitación del tema 2. Esquema de trabajo. 3. Delimitación del objeto matemático para "Ara Solis" 4. Revisión teórica <p>Instrumentos Análisis de contenido</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Trasposición entre los componentes matemáticos y astronómicos al plano didáctico en la construcción de la función trigonométrica. <p>Instrumentos Análisis de contenido</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Trasposición entre los componentes matemáticos y astronómicos al plano didáctico en la construcción de la función trigonométrica. <p>Instrumentos Análisis de contenido</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Redacción del trabajo final. 2. Confrontación de los objetivos propuestos, depuraciones y conclusiones 3. Protocolo de construcción de "Ara Solis" <p>Instrumentos Análisis de contenido</p>

Figura 2. Tabla del proceso metodológico para el desarrollo de Ara Solis

De esta manera los instrumentos de recolección de información que están planteados desde la perspectiva de la investigación documental (Jurado, 2002), que hace referencia a dimensionar una ruta para el desarrollo del trabajo de investigación los cuales se resaltarán a continuación.

Análisis de contenido: este permitió discernir la copiosa información con la que se contaba en el momento de empezar abordar la investigación, ya que se desbordaba lo que se pretendía hacer sin encontrar un foco hacia donde direccionar el objetivo.

- De esta manera el campo de la astronomía se redujo al estudio de la ubicación de cuerpos celestes con base en los diseños y registros astronómicos que los Muisca dejaron establecidos en el observatorio astronómico, en los que se resaltan principalmente los equinoccios y los solsticios.
- En el campo de la matemática en el manejo geométrico y de resolución de triángulos por medio de las funciones trigonométricas para generar modelos matemáticos que posiblemente hayan tenido en cuenta los muisca en el momento de ubicar los monolitos para la estipulación de un calendario astronómico.
- En el campo de la educación matemática en la elección de las temáticas escolares haciendo uso de los estándares curriculares y de los lineamientos, para la elección de la población para la cual está dirigida la investigación. y así establecer una ruta de aprendizaje teniendo en cuenta propuestas didácticas para grado decimo en el aprendizaje de la trigonometría y en especial de las funciones trigonométricas.
- En el diseño del dispositivo didáctico Ara Solis como eje transversal en donde convergen cada uno de los campos anteriormente mencionados, para así resaltar el hecho de utilizar la observación del cielo (la astronomía) como contexto próximo del estudiante para la construcción de conocimientos dentro de un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Fotografías: Son la evidencia fáctica de la ubicación de los diferentes monolitos con respecto algún astro de la bóveda celeste, y específicamente con el astro rey el Sol, ya que a través de éste es posible la existencia de un calendario que les permitía a los Muisca realizar rituales y fiestas, sembrar y cosechar (Silva, 1981) y tener una vida socio-cultural determinada por el movimiento de las estrellas.

Ideas principales: por medio de éstas se organizó la información de los autores que aportan de manera significativa en el desarrollo de la monografía, permitiendo depurar lo que no se hace necesario y cotejar la múltiple información que se encuentra de los tres

campos bases para la construcción de Ara Solis, además de remitirse a un autor con mayor facilidad y por supuesto a la ideas que este aporta a la investigación.

Organización por temáticas: Estas ideas fueron evidenciadas en la tabla de contenido, esto facilito la utilización de los recursos bibliográficos con los que se contaba y la optimización del tiempo, teniendo en cuenta lo esporádico que parecía la realización de este trabajo, además de remitirse a las ideas del autor teniendo la información a la mano siempre y cuando se quiso disponer de ella.

3. CAPÍTULO: LA FUENTE DE LA MATEMÁTICA Y LA ASTRONOMÍA

En este capítulo se presenta el sustento teórico, matemático y astronómico, que permitirán evidenciar los elementos que se tendrán en cuenta para la construcción de Ara Solis, resaltando el hecho de la constante relación que existe entre estas dos disciplinas.

3.1. Ubicación en el espacio: las coordenadas horizontales

Para aquellos observadores perspicaces y que no se conforman con escrutar el cielo nocturno, sino que por el contrario van más allá y están pendientes del momento en que se asoman los cuerpos celeste en el horizonte por el este al atardecer y de los que poco a poco aparecen en el hemisferio visible del firmamento, del movimiento aparente que hacen durante la noche y el tiempo que tarda en cruzar el cielo, se ha desarrollado un sistema de coordenadas que indican la posición exacta en la que se encuentra determinado cuerpo y de esta manera hacer más rigurosa la observación de ese cielo nocturno. (Portilla, 2009).

Aunque los cuerpos celestes se encuentran a grandes distancias en donde pareciese que se pierde el sentido de profundidad y de perspectiva, estos dan la impresión de estar adheridos a una superficie que se extiende por todas direcciones creando la ilusión de una esfera perfecta que rodea por completo al espectador y éste se siente el centro de dicha esfera ilusoria. En donde aparentemente todos aquellos puntos luminosos están a la misma distancia, esta se conoce como bóveda o esfera celeste y que puede ser tan grande como se quiera, teniendo en cuenta el tamaño colosal de nuestro planeta que también tiene forma de una especie de esfera con el observador que está parado sobre ella. (Portilla, 2009).

Esta esfera que durante el día tiene un fondo de color azul y de noche uno de color negro adornado con puntos luminosos, se puede caracterizar teniendo como referencia el planeta tierra; para ello se tiene como punto de partida un horizonte, que es el campo de visión con el que cuenta un observador (ver figura 5), en donde se distinguen dos hemisferios: uno visible que se encuentra arriba del horizonte y uno invisible que se encuentra debajo de éste.

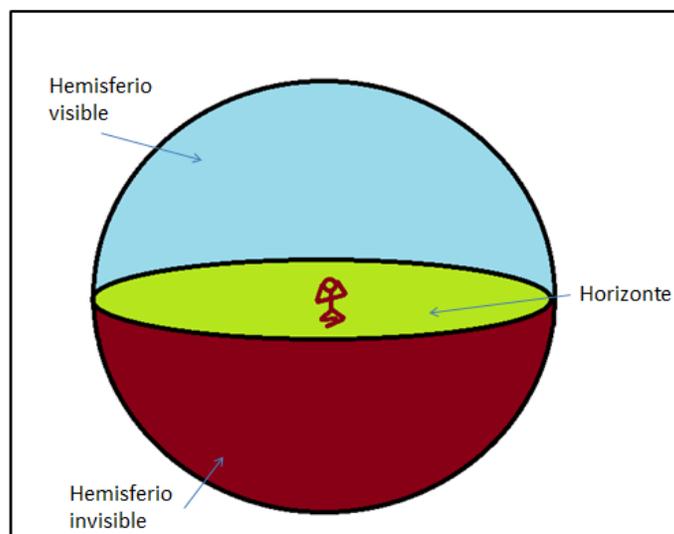


Figura 3: Caracterización de la bóveda celeste dividido en dos hemisferios.

Ya teniendo un horizonte definido se puede determinar otros conceptos que caracterizan la bóveda celeste (ver figura 6), según (Portilla, 2009):

- *El polo norte celeste (PNC) y polo sur celeste (PSC)* son puntos que resultan de la intersección del eje de rotación terrestre con la esfera celeste. También se pueden ubicar haciendo una proyección de los polos terrestres sobre la bóveda.
- *Ecuador celeste (EC)* es la circunferencia máxima que resulta de la intersección del plano que contiene al ecuador terrestre (ET) con la esfera celeste, dividiéndola en dos partes el hemisferio norte celeste y el hemisferio sur celeste.
- *Los meridianos celestes* son semicircunferencias máximas que pasan por los polos celestes, además estos resultan de la proyección de los meridianos terrestres sobre la bóveda.
- *El cenit (o zenit) (C)* de un observador es el punto imaginario de la esfera celeste que está situado directamente sobre el observador.
- *El nadir (C')* de un observador es el punto imaginario de la esfera celeste que es diametralmente opuesto a C.

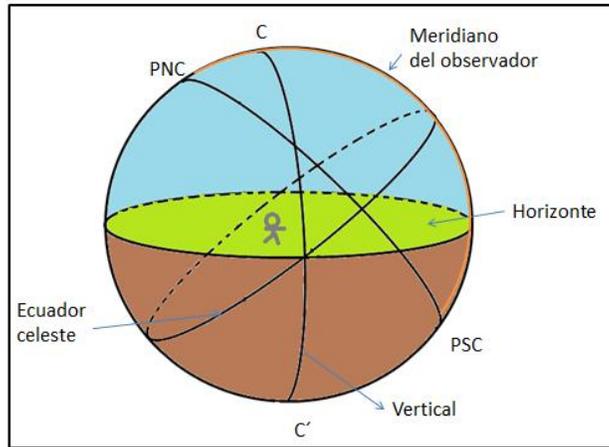


Figura 4: División de la bóveda celeste en líneas imaginarias.

La esfera celeste además de tener ciertas características, también se clasifica según el centro de la misma, encontrando las siguientes: *topocéntrica* con centro en el observador, *Geocéntrica* con centro en el centro de la tierra, *Heliocéntrica* con centro en el centro del Sol y *Baricéntrica* con centro en el centro de gravedad de un sistema. Y a partir de estas se definen el tipo de coordenadas celestes que se utilizan para la ubicación de los cuerpos, entre los que se encuentran, las coordenadas horizontales, coordenadas ecuatoriales horarias y absolutas, que son las que interesan trabajar, ecuatoriales geocéntricas, eclípticas y coordenadas galácticas. (Calvo Mozo, 2001)

Las coordenadas horizontales (ver figura 7) son las más utilizadas por los astrónomos aficionados, se identifican por trabajar una esfera celeste topocéntrica, en donde las coordenadas son: El azimut (o acimut) (A) y la altura (h). El Azimut de un astro es un ángulo contado sobre el horizonte que comienza a medirse desde el punto cardinal norte en dirección hacia el este (oriente) hasta la vertical del astro correspondiente y la altura de un astro es el ángulo contado sobre la vertical del astro que comienza medirse desde el horizonte hasta el astro correspondiente. El azimut toman valores correspondientes entre el intervalo $0^{\circ} \leq A \leq 360^{\circ}$.

En el caso de la altura h de un astro relativo a un observador constituye un criterio de visibilidad del mismo. Si el astro está por encima del horizonte (visible para el observador), tendremos $h > 0$; pero si está por debajo del horizonte (invisible para el observador), se obtiene $h < 0$. La altura toma valores entre el intervalo $-90^{\circ} \leq h \leq 90^{\circ}$. Por consiguiente $h_{(cenit)} = 90^{\circ}$, $h_{(nadir)} = -90^{\circ}$, $h_{(horizonte)} = 0^{\circ}$.

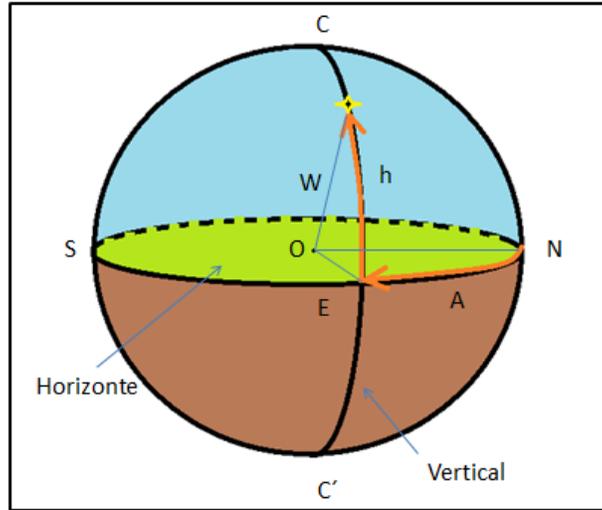


Figura 5: Ubicación de un cuerpo celeste haciendo uso de coordenadas horizontales.

Cabe resaltar que este tipo de coordenada depende netamente del observador y que a causa del movimiento diurno de un astro, éstas cambian permanentemente por lo que es necesario especificar el tiempo de la observación con mayor exactitud (Portilla, 2009).

Las coordenadas horarias al igual que las absolutas tienen como plano de referencia el ecuador celeste y también trabajan una esfera celeste topocéntrica. Las coordenadas horarias manejan los siguientes puntos de referencia: El ángulo horario (H) y la declinación (δ). El ángulo horario de un astro es un ángulo contado sobre el ecuador celeste desde el meridiano del observador en dirección hacia el oeste hasta el círculo de declinación del astro correspondiente y la declinación de un astro es el ángulo contado sobre el círculo de declinación de este que comienza a contarse desde el ecuador celeste hasta el astro correspondiente (ver figura 8). El ángulo horario toma valores que corresponden a unidades de tiempo, variando de 0 minutos hasta 24 horas. (Portilla, 2009).

La declinación por su parte es positiva si la estrella está ubicada en el hemisferio norte celeste, de lo contrario será negativa. Nótese que: $\delta_{(PNC)} = 90^\circ$, $\delta_{(PSC)} = -90^\circ$, $\delta_{(E.C.)} = 0^\circ$

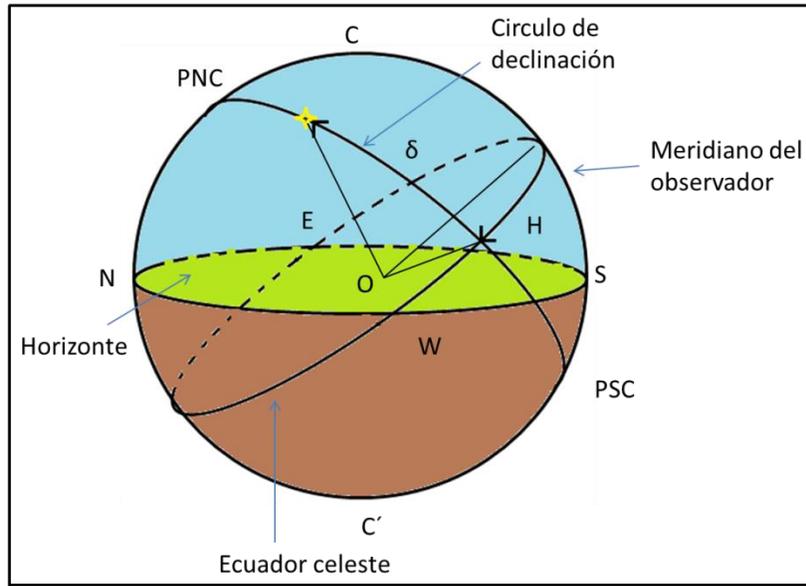


Figura 6: Ubicación de un cuerpo celeste usando coordenadas horarias.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas y tienen los siguientes coordenadas: Ascensión recta (α) y la declinación (δ). La ascensión recta de un astro es el ángulo medido sobre el ecuador celeste contando desde el punto vernal (γ) en dirección contraria a la de las agujas del reloj, visto desde el PNC, hasta el círculo de declinación del astro. Al igual que el ángulo horario, la ascensión recta de un astro se acostumbra a expresar en unidades de tiempo. La declinación se mide exactamente igual que en las coordenadas horarias (ver figura 9). (Portilla, 2009).

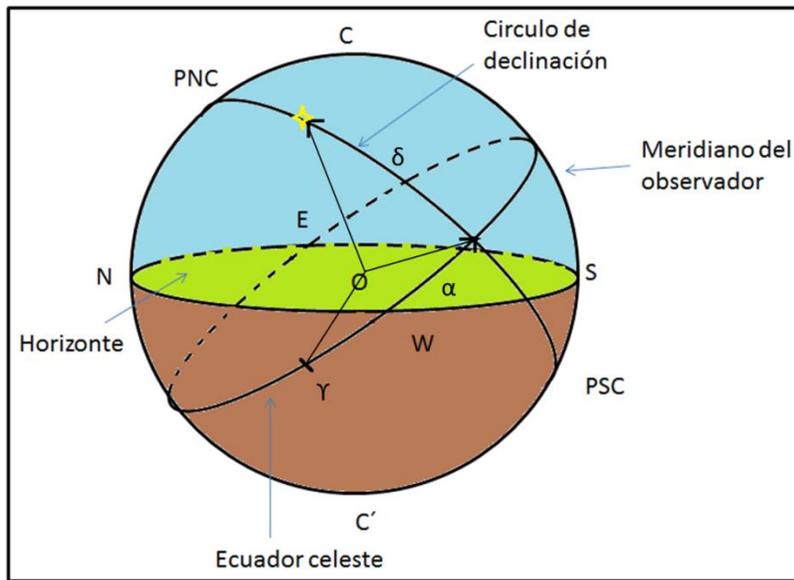


Figura 7: Ubicación de un cuerpo celeste utilizando coordenadas ecuatoriales absolutas.

Este tipo de coordenadas que trabajan sobre el ecuador celeste pueden ser absolutas, ya que servirían para cualquier tipo de observador sin importar su posición geográfica y la hora de la observación. Pero la diferencia entre este tipo de coordenadas radica en: Aunque el ángulo de la declinación es el mismo y no varía, el ángulo horario si, ya que depende netamente del observador a diferencia de la ascensión recta en el que punto de referencia para empezar a tomar la medida es la misma.

Con este tipo de coordenadas un observador se puede embarcar en la aventura de conocer la bóveda celeste, por medio de la ubicación de los cuerpos y el estudio de sus movimientos, abriendo una puerta que lleva a un mundo fascinante lleno de misterios y de imágenes sin iguales que llevan al observador a un mundo de ensueño, al mundo de la astronomía.

3.2. Las matemáticas del cielo: evolución histórica de la astronomía y trigonometría.

Según la historia, la matemática surge dentro de las respuestas a los problemas en los cuales se encuentra una sociedad en desarrollo, el trabajo y la interacción con la naturaleza son actividades de las cuales se tiene registro desde tiempos remotos. La astronomía es una actividad que está directamente implicada, siendo la ciencia que describe el movimiento de los astros encontrando unos patrones cíclicos que se generan en el universo. Su estudio inicia con el análisis de los astros que más curiosidad le han generado a la humanidad el Sol y la Luna, que están estrechamente relacionados con el modo de vida del planeta tierra.

Estos astros han determinado el desarrollo de las civilizaciones en diferentes longitudes y latitudes del planeta, en el antiguo Egipto, el sol, representaba no solo una figura religiosa si no que marcaba también las épocas de siembra y cosecha, debido a las diferentes posiciones que este astro tenía en determinadas épocas del año el rio Nilo crecía. Para predecir estos comportamientos cíclicos del rio, desarrollaron un calendario solar. Para el cual las matemáticas son la herramienta fundamental de elaboración e interpretación.

No solo en el campo de la agricultura, esta sociedad uso la matemática para desarrollar sus actividades, desde el simple conteo que debía hacer un mercader (relación uno a uno) con sus productos hasta el más grande calculo que debían de realizar los constructores para sostener sus grandes fortificaciones.

En el caso de la trigonometría, que se centra en el estudio particular de los triángulos y sus propiedades, que nace de relacionar los cálculos matemáticos con las observaciones astronómicas, todas las civilizaciones antiguas además de la egipcia, la mesopotámica, china, india, maya y la griega lograron grandes avances. En este capítulo se presentara dicha relación con el fin de fundamentar el estudio de las funciones trigonométricas como base para interpretar los comportamientos de la bóveda celeste.

3.2.1. El origen (Mesopotamia y Egipto)

En la antigua Mesopotamia la mayor parte de la tierra pertenecía los sitios religiosos. La sucesión de las estaciones estaba regulada por los dioses, por lo tanto las operaciones agrícolas estaban bajo jurisdicción de las diversas deidades. Los primeros astrónomos fueron los sacerdotes porque disponían del tiempo adecuado al no estar ocupados en actividades agrícolas y estar interesados tanto desde el punto de vista agrícola como el punto de vista ritual. El fenómeno más importante que se repetía de forma periódica, era el de los cambios de la Luna. Por tanto el calendario babilónico, se basaba en los meses lunares, de 29 a 30 días cada uno. Al término de 12 meses lunares ellos observaban que el ciclo volvía empezar. Este les género que establecieran un regla rigurosa para el tiempo trascurrido en los días.

Debido al gran conocimiento algebraico, por la invención de la variable, asistiendo a un valor no denominado y la caracterización de la ausencia de algo, el número cero. Usaron un sistema ordenado con una base agrupada en cantidades de 60 unidades denominada el sistema sexagesimal.

Históricamente se cree por la aparición en la antigua babilonia, las tablas cuneiformes donde describen la medición de ángulos y lados de un triángulo rectángulo en la tabilla de

Plimpton 322 (Piñeiro, Ibañes, & Ortega, 1998), estos grabados muy similares a lo que se conoce hoy en día como las ternas pitagóricas no estudiadas hasta 1000 años después.

En las observaciones celestes de los babilonios se tiene registro de tablas astronómicas de figuras que marcan el paso del sol en una serie de estructuras formadas por estrellas (constelaciones). En las tablas se registra que el 1° arco es la unidad de medida lo que le da origen a la división del círculo en 360° longitudes de arco. Es como registran el tiempo del día en el transcurrir del Sol, una vez se ha recorrido un grado han pasado 4 minutos, al cabo de 1 hora el sol a recorrido 15°, Así dedujeron que el Sol recorrerá 180 grados al cabo de 12 horas es decir, el tiempo que el sol dura en el firmamento, Posteriormente en la noche los babilonios concluyeron que el sol tarda en salir aproximadamente otras 12 horas (noche). Así concluyeron que el día y la noche sol dan una revolución de 360° aproximadamente 24 horas. Deduciendo que el sol gira alrededor de la tierra, concluyendo que la tierra es una superficie redonda.

El seguimiento del sol no solo llevo a pensar en la horas del día sino que además por también en el firmamento el sol en el atardecer los babilonios observaron que el sol se movía cambien por unos cúmulos de estrellas, lo que se conoce como el Zodíaco, que son una serie de constelaciones con forma de animales. (Ver figura 10)

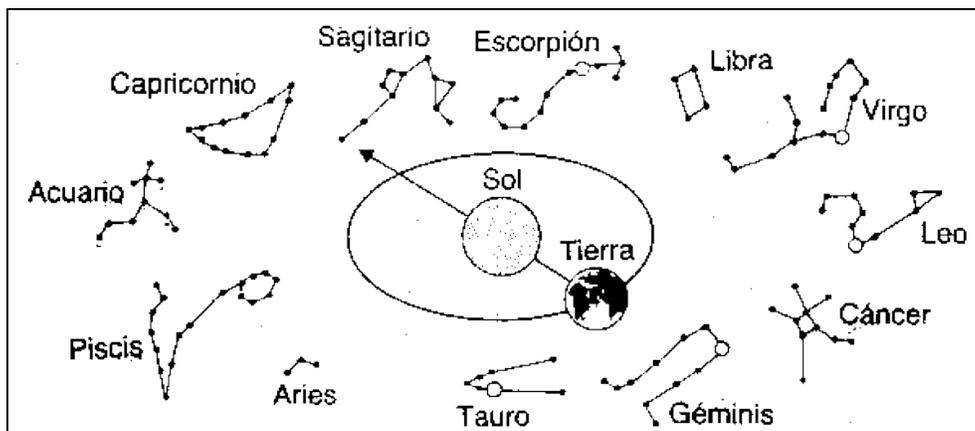


Figura 8: Representación de las 12 constelaciones del zodiaco en torno a la tierra y el sol.

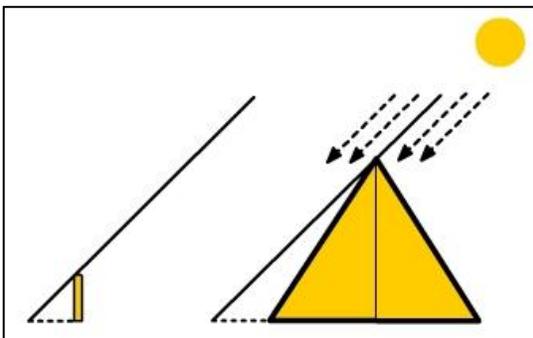
Así surge el sistema de medición de coordenadas, ángulos, minutos y segundos, los estudios cartográficos actuales muestra que sirve como sistema de georreferenciación. Es

así como el estudio de los ángulos, sirve dentro del surgimiento de la trigonometría como la unidad de medida. Dentro del análisis de los triángulos que son el elemento geométrico base para el estudio de esta rama de las matemáticas.

3.2.2. Los triángulos griegos

Los conocimientos babilonios pasaron a los griegos, aunque como civilización se habían establecido muchos antes, solo fue hasta el siglo VII a.C. que desarrollaron grandes avances en la formalización de concebir un concepto matemático y astronómico, en el caso de lo encontrado por las civilizaciones precedentes es retomado como objeto de estudio, en los elementos de Euclides un compendio de 13 libros se muestra con detalle las definiciones, postulados y proposiciones sobre las naturalezas geométricas ya generalizadas, que demostraron toda la cultura griega. (Piñeiro, Ibañes, & Ortega, 1998)

Para empezar encontramos todas las demostraciones de congruencia y semejanza que demostró **Thales**, nacido en la ciudad de Mileto. Este matemático se reconoce por el trabajo que hizo frente a las pirámides de Giseh, más exactamente con la de Keops, donde intento medir la altura de la pirámide, teniendo en cuenta la semejanza que generaba las sombras de la pirámide y el paralelo con una vara simulando una altura relativa.



Thales descubre que existe una razón entre los lados de varios triángulos rectángulos, que están en relación con alguno de sus lados, como muestra la figura 11.

Figura 9: Representación de la proyección de la sombra con respecto a la luz solar.

Thales, en la observación con el astro solar, descubre que existe una relación entre la sombra que genera la pirámide de Keops y la sombra que genera la vara a la que va a hacer la comparación descubre que existe una Razón de proporcionalidad entre la sombra que genera el sol en la pirámide y su vara guarda una relación. Concluye que la

altura de la vara guarda una relación si la sombra que proyecta a una hora determinada del día.

Además de establecer y demostrar cuatro teoremas:

1. Todo círculo es dividido por su circunferencia.
2. Los ángulos de la base de un isósceles son iguales.
3. Dos ángulos opuestos son iguales si se intersectan dos líneas iguales
4. Teorema de Tales: Los triángulos son semejantes aunque sus áreas no lo sean.

Según Diógenes Laercio historiador clásico, en su libro: Vida, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres menciona a varios griegos que aportaron al conocimiento matemático al igual que Thales a partir de la interacción con el entorno. Así mismo, la invención del gnomon¹ se le atribuyó a **Anaximandro** quien fue discípulo de Thales, además el estudio del cálculo del tiempo, también estudio la predicción de los solsticios y equinoccios y algunos trabajos para medir la distancia y tamaño de las estrellas (un ejemplo de la observación de la salida y puesta del sol en dichas fechas esté representada en Bogotá, por los cerros Monserrate y Guadalupe como muestra la figura 12). **Anaxágoras** retoma el estudio de las fases de la luna mencionada por los babilonios, y establece que la luna es una roca que gira alrededor de la tierra y que siempre le da la cara al Sol.



¹ Gnomon: Objeto alargado que proyecta una sombra, por ejemplo los obeliscos griegos, son artefactos

Figura 10. Representación de las salidas y puestas del sol durante los equinoccios y solsticios vista desde la Plaza de Bolívar, en el centro de Bogotá.

Estos matemáticos que siguieron la línea de Thales, generan varios axiomas geométricos que son recopilados, teniendo en cuenta el estudio de los triángulos y los ángulos, que se obtuvieron del estudio de los gnómones.

Más tarde se le atribuye a la escuela de los Pitagóricos el estudio de los poliedros regulares, solidos con caras iguales, que además fueron utilizados para la representación de los elementos de la naturaleza. Además el estudio del pentágono regular por medio del gnomon una técnica que precedía de los egipcios que consiste en la división de un segmento en otros dos que formen un rectángulo de un área dada, ligado estrechamente con un problema de ligar una área con otras semejantes a una tercera (por medio de cuadrados) esto lleva a un problema generalizando en una ecuación cuadrática. (Ver figura 13)

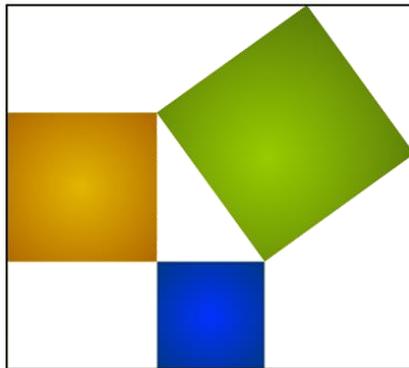


Figura 11. Representación geométrica del teorema de Pitágoras.

Es así como llega a la demostración griega más impórtate de la matemática la generalización del teorema del triángulo rectángulo, comúnmente denominado el “teorema de Pitágoras” Afirma que: En todo triangulo rectangulo, las suma de los cuadrados de los catetos son iguales al cuadrado de la hipotenusa: La expresion algebraica esta planteada asi:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Después de la incursión de lo pitagóricos, empieza la formalización del cuestionamiento sobre la esfericidad de la tierra, es **Platón** quien retoma las ideas pitagóricas sobre la

tierra y su forma redonda ya que se toma como creación divina y es centro de universo. Pero **Eudoxo** de Cnido concretamente interviene, generalizando formas matemáticas de los movimientos matemáticos. Más tarde **Apolonio de Pergamo**, plantea un modelo de análisis de lo observado en la astronomía y la geometría analítica, teniendo como base la esfericidad de la tierra, por otro lado, **Dicearco** que usa las coordenadas esféricas teniendo en cuenta el meridiano de la ciudad de Rodas.

Euclides, denominado el padre de la geometría aparece a mediados del siglo III antes de Cristo. En un tratado de 13 libros llamado los Elementos, el método deductivo es como explica la relación de todo lo planteado por los griegos precedentes. Unas de las leyes del movimiento diurno lo enuncian, afirmando así la definición de círculo, en su libro 1 de los Elementos de Euclides.

“es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí”.

Dentro del marco del análisis de la circunferencia, el uso de las coordenadas en grados impulso el desarrollo de las distancias curvas y longitudes de arco, necesarias para calcular distancias curvadas. **Arquímedes** en el 287 a.C. Generalizo el área del círculo, teniendo en cuenta un radio r , afirmando que es aquella área igual a la de un triángulo cuya base tiene la misma longitud del r , además de que por el método de exhaustión describe la aproximación del número π , posteriormente generalizado para hallar el área y el perímetro de círculo y la circunferencia respectivamente.

3.2.3. Bases de la trigonometría (Siglo III y II)

Aristarco de Samos, Revoluciona su periodo en la Grecia clásica, siendo el primer griego que afirma y modela un sistema heliocéntrico (el sol es el centro del sistema solar). Desarrollando con ayuda de la geometría, una razón de la distancia del sol, la luna y el planeta tierra. Al igual que algunos griegos retoma las fases lunares como premisa que la luna siempre le da la cara al sol y en el momento que genera una luna creciente o una luna menguante. (Figura 14).

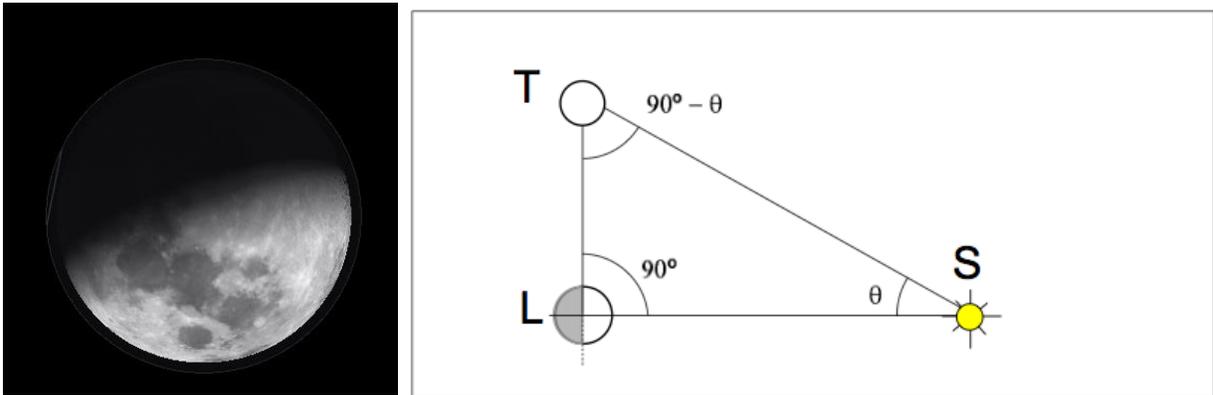


Figura 12: Representación de la deducción del modelo heliocéntrico de Aristarco de Samos. Imagen de la luna en media creciente tomada de Stellarium.

A partir de esta deduce que además la luna gira al redor de la tierra llega un punto donde la tierra y la luna forman un ángulo de 90° con respecto al sol. Sabiendo que en este punto la distancia del luna-sol, es perpendicular al distancia tierra-luna. Dejando como desarrollo un ángulo de 87° con respecto al cateto más largo. Concluyendo así que existe una relación de la distancia luna y sol a razón de 1 a 20. La demostración es lógica, pero el resultado es nulo ya que en realidad la razón es de 1 a 400. (Meléndez, s.f).

70 años después gracias al método de Aristarco, Eratóstenes calcula el diámetro de la tierra, observando el solsticio de verano en dos ciudades en Siena (Ubicada cerca la trópico de cáncer) y Alejandría, teniendo en cuenta un gnomon en ambas ciudades observo que, una ciudad no había sombra y en la otra a las 12:00pm se generaba un ángulo de 7° . Sabiendo que la distancia entre ambas ciudades es de 800km y a la premisa que la tierra era plana. Eratóstenes demuestra que efectivamente debe tener una superficie curva. Aprovechando este hecho logro calcular el diámetro de la tierra.

En el siglo II a.C. La astronomía comienza a desarrollar un rigor matemático, impuesto por **Hiparco de Nicea**, quien por métodos netamente geométricos desarrolla generalizaciones astronómicas, a partir de círculos y triángulos, modela las distancias de estrellas. Una vez trabajo el concepto de las distancias angulares y la organización de la cuerda como distancias comprendidas por un ángulo central. Con Hiparco se funda el estudio de la **trigonometría** formal, el cual se basa en el análisis de los triángulos que circunscriben un

triángulo rectángulo, las distancias de arcos y la resolución de triángulos oblicuángulos. (Ver figura 15)

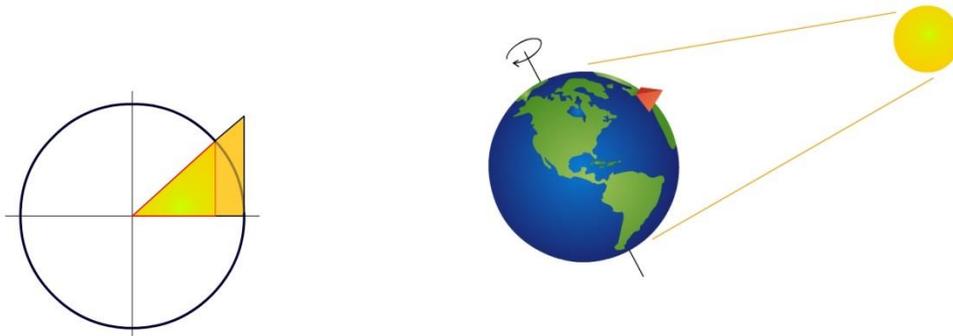


Figura 13: Relación entre círculos y triángulos planteados por Hiparco, teniendo en cuenta el movimiento del sol.

Los conocimientos de los babilonios pasaron a Grecia, Hiparco, quien construyó las tablas de “cuerdas” para la resolución de triángulos planos, (que son la base de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad) en ellas iba relacionando las medidas angulares con las lineales.

Para la elaboración de dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde el grado 0° hasta los 180° grados anotando en la tabla la longitud de la cuerda de limitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta.

No se sabe con certeza el valor que usó Hiparco para el radio “ r ” de esa circunferencia, pero sí se conoce que 300 años más tarde el astrónomo alejandrino Tolomeo utilizó $r = 60$, dado que, los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

En su gran libro de astronomía “El Almagesto”; Tolomeo incorporó una tabla de cuerdas con un error menor que $1/3.600$ de unidad. Junto a ella explicaba su método para compilarla, y a lo largo del libro mostraba bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los dados. Además de eso él enunció el llamado “teorema de Menelao”, utilizado para resolver triángulos esféricos, y aplicó sus teorías trigonométricas en la construcción de astrolabios y relojes de sol. Esta trigonometría se empleó durante muchos siglos como introducción básica para los astrónomos.

De acuerdo con Flores Gil (2008) Hace más de 3.000 años los babilonios y los egipcios ya empleaban los ángulos de un triángulo y las funciones trigonométricas para realizar medidas en agricultura los primeros, y nada más y nada menos que en la construcción de las pirámides por los segundos. También se aplicaron en los primeros estudios de astronomía para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios y el cálculo del tiempo, y por supuesto en navegación para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas. Los egipcios fueron quienes establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, criterio que se ha mantenido hasta hoy en día.

Indiscutiblemente uno de los mayores aportes a la matemática y especialmente a la geometría es de la Grecia Clásica, Hiparco construyó las tablas de “cuerdas” para la resolución de triángulos planos, que fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad. En ellas iba relacionando las medidas angulares con las lineales. Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0° hasta los 180° e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta.

Esa tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor que usó Hiparco para el radio r de esa circunferencia, pero sí se conoce que 300 años más tarde el astrónomo alejandrino Tolomeo utilizó $r = 60$, ya que los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

Tolomeo incorporó también en su gran libro de astronomía “El Almagesto” una tabla de cuerdas con un error menor que $1/3.600$ de unidad. Junto a ella explicaba su método para compilarla, y a lo largo del libro daba bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos.

Además de eso Tolomeo enunció el llamado “teorema de **Menelao**”, utilizado para resolver triángulos esféricos, y aplicó sus teorías trigonométricas en la construcción de astrolabios y relojes de sol. La trigonometría de Tolomeo se empleó durante muchos siglos como introducción básica para los astrónomos.

3.2.4. La mística Hindú y la trigonometría Árabe

Según Piñeiro, Ibañes, & Ortega (1998) Un aporte sustancial a la construcción de la trigonometría es el hecho por la cultura Hindú desde el siglo V al VII, la herramienta más usadas por los indios fue la “*semicuerda*” (ver figura 16) y esta fue empleada denominar la función del **Seno** como se muestra en la siguiente gráfica, de igual forma se pueden evidenciar diferentes funciones creadas por esta cultura y su actual denominación.

$$\begin{aligned}jya(\alpha) &= AD = r \operatorname{sen}(\alpha) \\kojya(\alpha) &= BD = r \cos(\alpha) \\ukramajya(\alpha) &= DE = BE - BD = r(1 - \cos(\alpha))\end{aligned}$$

Un avance importante en la construcción de la trigonometría por esta cultura es el aporte hecho por el matemático Bhaskara I, quien descubrió una ecuación que permitía hallar el *Seno* de cualquier ángulo sin recurrir a una tabla.

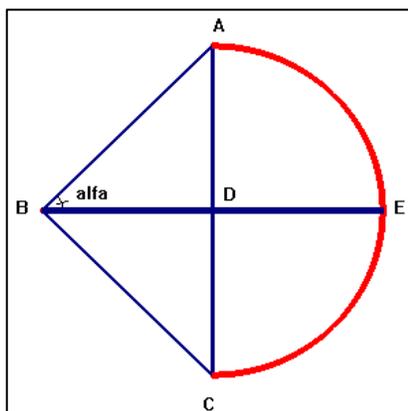


Figura 14: Relación de la cuerda con la función Seno.

De acuerdo con Flores (2008) A finales del siglo VIII los astrónomos árabes continuaron con los estudios de trigonometría heredados de los pueblos de Grecia y de la India, prefirieron trabajar con la función *Seno*. De esta forma, a finales del siglo X ya habían completado tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas: *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante*.

También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos, donde incorporaron el triángulo polar. Todos estos descubrimientos fueron aplicando a la astronomía, logrando medir el tiempo astronómico, e incluso los utilizaron para encontrar la dirección de la Meca, tan fundamental a la hora de realizar las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica orientados en esa dirección.

Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de $1/60$ de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones.

La trigonometría se introdujo en occidente sobre el siglo XII a través de traducciones de libros de astronomía arábigos. En Europa fue el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, quien realizó el primer trabajo importante en esta materia, llamado "*De Triangulus*". Durante el siguiente siglo otro astrónomo alemán, Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de como longitudes de ciertas líneas.

En conclusión la trigonometría ha pasado por diferentes necesidades ya sea la medida de terreno para la agricultura, la construcción de tumbas, la ubicación de sitios sagrados hasta el lugar del hombre y su mundo en el universo (astronomía).

3.2.5. Conceptos matemáticos para “Ara Solis”

Teniendo en cuenta la reconstrucción histórica del objeto matemático que se pretende modelar con *Ara Solis*, se presentara los conceptos trigonométricos a tener en cuenta en la construcción del dispositivo.

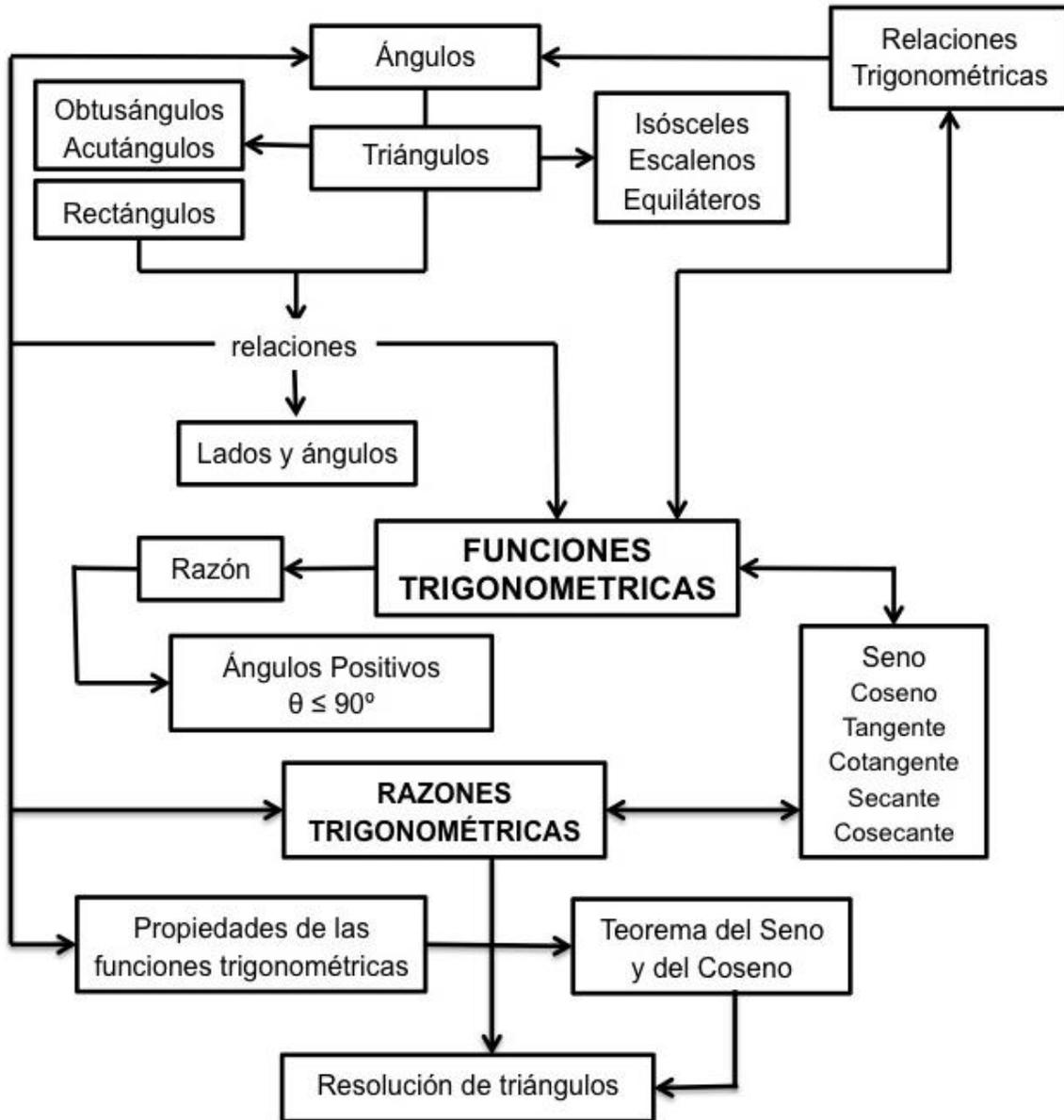


Figura 15: Tabla de relación de la construcción de la función Seno.

3.3. Paralaje: un acercamiento a las estrellas.

Una de las preguntas que siempre rondan en la cabeza es como saber la distancia en la que se encuentra una estrella de la tierra, sabiendo que se localiza a años luz, (una distancia que se escapada de la percepción, por las unidades de medida utilizadas comúnmente) aunque pareciesen que todas las estrellas se encuentran a la misma distancia, se sabe que nos es así, y eso hace que dicho interrogante se haga más notable. Desde la antigüedad Ptolomeo calculaba las distancias de las estrellas por medio de la trigonometría, trabajo plasmado en el almagesto, libro mencionado en varios de los apartados de la investigación.

Pero se ha desarrollado un método que permite calcular las distancias a las estrellas para aquellos que comienzan a *navegar* en el océano del conocimiento en el estudio de la astronomía y que utilizan como instrumento de observación sus propios ojos. Dicho método se conoce con el nombre de la paralaje; la paralaje es un fenómeno que consiste en el desplazamiento aparente de una estrella cercana sobre el fondo de otras estrellas más lejanas, a medida que la Tierra se mueve a lo largo de su órbita alrededor del Sol. Este fenómeno ha sido aprovechado como el primer y más simple método para la medida de las distancias estelares.

Según Ferro (1999)

Una de las primeras aplicaciones del método del paralaje fue efectuada por Tycho de Brahe, quien descubrió en el lejano 1578 que los cometas no son fenómenos atmosféricos como entonces pensaba la mayoría de los astrónomos, sino objetos celestes lejanos a la Tierra. La primera medida de distancia estelar fue realizada por Friedrich Bessel en 1838, sobre la estrella 61 Cygni; ese mismo año el astrónomo escocés Thomas Henderson medía, siempre con el método de la paralaje, la distancia de Alpha Centauri, la estrella más cercana al Sol. (pp. 301)

Ahora bien resaltando que la paralaje es el ángulo formado al observar un astro desde dos puntos de vista distintos y que depende de la distancia que medie entre el observador y objeto, de tal forma que cuanto más lejos este la estrella menor será el ángulo (ver figura 18). De esta manera se podrá determinar si un cuerpo celeste está lejos o cerca de la tierra.

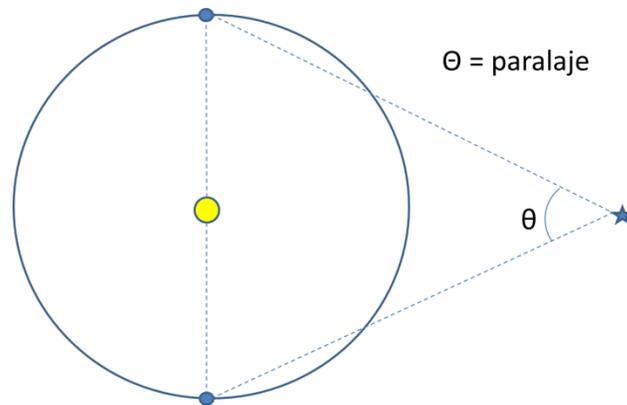


Figura 16. Observación de un cuerpo celeste desde dos fechas diferentes en la tierra.

Otro dato que se debe tener en cuenta en el cálculo de la paralaje, es el radio de la órbita de la Tierra o en otras palabras la distancia de la tierra al Sol (149.597.870.700 metros) que es igual a una unidad astronómica (UA) (Portilla, 2009). Además el ángulo que subtende la distancia de la tierra al sol es de 1 segundo de arco cuya medida puede ser dada en grados o en radianes. Cuando esta medida de ángulo se presenta la distancia de la Tierra a dicho astro se conoce como el nombre de parsec que es otra medida astronómica que equivale a 3,26 años luz, o $3,086 \times 10^{16}$ metros. (Martínez, Miralles, Marco, & Galadí-Enríquez, 2005)

Hay que tener en cuenta que con estos datos y haciendo uso de cálculos trigonométricos podemos hallar la distancia de la tierra a la estrella, (ver figura 19) los puntos BAC forman un ángulo recto, $\sphericalangle ACB = (\theta/2)$ es la mitad de la paralaje, el segmento AB es la distancia de la tierra al sol y haciendo uso de las razones trigonométricas en este caso la tangente del ángulo $(\theta/2)$ tenemos; $\tan(\theta/2) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ y despejando tenemos que; $\text{cateto adyacente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\tan(\theta/2)}$ el cateto adyacente es la distancia de la tierra a la estrella.

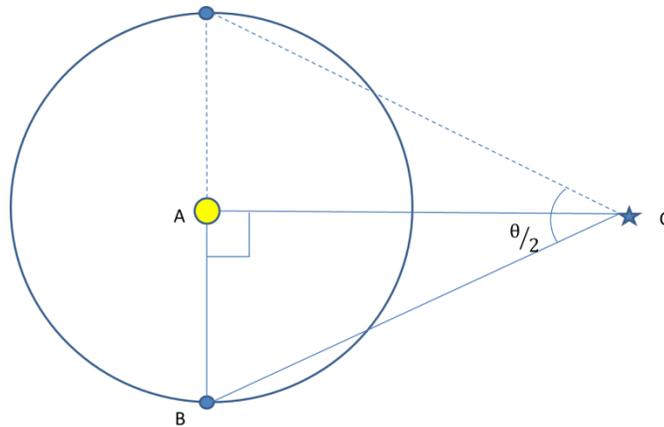


Figura 17: Datos a tener en cuenta en los cálculos trigonométricos para hallar la distancia a una estrella.

Cabe hacer unas aclaraciones con respecto al uso de este método para calcular la distancia a una estrella y su trabajo en la astronomía en el caso de quererse hacer de modo profesional. Primero que todo cuando se desea calcular la paralaje se debe hacer varios cálculos para que la medida sea exacta (la paralaje para un aficionado es una aproximación al cálculo real) como lo son; aberración anual, corrección a las coordenadas astronómicas, nutación, corrección horaria y el uso de un software que demarque el ángulo de la paralaje. Además ningún objeto en el universo supera el 1" de ángulo de paralaje y que a mayor distancia la paralaje es menor, y los errores cometidos se van haciendo más y más significativos, de modo que a partir de 100 años luz ya no es fiable la paralaje trigonométrica para determinar distancias estelares. (Genebriera & Doreste, Paralaje estelares, la 61 cygni, S.f.)

De esta manera un observador curioso se puede acercar o por lo menos llegar a bosquejar una idea del tamaño del universo y del lugar insignificante que ocupamos en él. De cómo usamos este método en el aula de clase es un tema que se tratará más adelante.

3.4. Tiempos en astronomía (calendarios astronómicos).

El conocimiento está dispuesto para aquellos que tengas ojos para observar y oídos para escuchar, para aquellos que se pregunten el porqué de las cosas y no satisfechos con su pregunta se aventuren en busca de una respuesta; esto lo tenían claro antiguas culturas que interpretando lo que pasaba a su alrededor lo representaban ya fuera por medio de

construcciones (parque arqueológico san Agustín, parque arqueológico de Monquirá o parque arqueológico Tierra Adentro por ejemplo) o por medio del arte (frescos, arte rupestre o pictogramas), interactuado con su contexto de esta manera.

Y es a partir de la observación de la bóveda celeste que se llegó a la estipulación de la duración de un día, un año, los equinoccios y solsticios e inclusive el tiempo de la precesión de los equinoccios o año platónico. Actualmente sabemos que el día y la noche se producen por el movimiento de rotación de la tierra, que los equinoccios y solsticios (estaciones climáticas) y la duración de un año se deben al movimiento de traslación de la tierra, y que el año platónico se produce por un movimiento llamado precesión; que es un movimiento como de trompo que realiza la tierra.

La predicción de dichos fenómenos ha interesado a diferentes culturas en la antigüedad, como los Egipcios de donde toman parte de sus conocimientos los antiguos Griegos posteriores a Platón, gracias a la conquista de Alejandro Magno de esta parte del mundo hacia el año 336 a.C. y la instauración de la ciudad de Alejandría en donde se encontraba la biblioteca más importante del mundo antiguo llegó a tener en torno a los 400.000 volúmenes y se convirtió en la pieza fundamental de una institución sin precedentes, que tuvo una importancia para el progreso de la ciencia quizás no alcanzada a lo largo de la historia por ninguna otra: el Museum. (Piñeiro, Ibañez Jalon, & Ortega del Rincon, 1998)

Cuando la estrella Sirio se observaba en el horizonte indicaba para ellos el comienzo de las lluvias e iba ser esta estrella su punto de referencia para determinar la duración de un año, dividiéndolo tres partes según las inundaciones del río Nilo y su impacto en el medio ambiente; la primera de estas se conoce como, Ajet que se caracteriza por el desbordamiento del río, Peret que es la disminución del nivel del río y la normalidad de su cauce y Shemu que es la temporada de cosecha. Cada temporada incluía cuatro meses de treinta días cada uno. Los cinco días restantes (seis desde la época de los romanos) fueron llamados *Heru-Renpet*, y se añadían al final del calendario, entre el último día de la temporada Shemu y el primer día de la temporada Ajet. Cada mes se dividía en tres *décadas*, y los días eran de veinticuatro horas. (Lull, 2005)

Asimismo los Caldeos que eran grandes astrónomos comprendieron los movimientos del Sol y de los planetas, conocían bien las constelaciones y le dieron nombre al zodiaco. Su

año tenía 360 días repartidos en 12 meses lunares de 30 días cada uno (nótese la importancia de observar también a la luna durante su proceso de Lunación). Como su duración no se ajustaba al año solar verdadero, cuya duración habían medido, agregaron cada seis años un mes. Los meses estaban divididos en cuatro semanas de siete días. El comienzo del año fue establecido inicialmente en el equinoccio de otoño y posteriormente en el de primavera. Aunque fueron los antiguos egipcios los primeros en sustituir el calendario lunar por un calendario basado en el año solar. Midieron el año solar en 365 días, divididos en 12 meses de 30 días cada uno, con 5 días extras al final. Hacia el 238 a.C. el rey Tolomeo III ordenó que se añadiera un día extra cada cuatro años, utilizando un esquema similar al moderno año bisiesto. (Planetario de Bogotá, 2005)

Pero esa medición del tiempo no estaba relacionada únicamente con las actividades agrícolas, también con ritos y festividades para la veneración de algún dios identificando cada época en el año. Así por ejemplo en el solsticio de verano se realizaban hogueras y sacrificios en honor al dios sol, en diferentes culturas del mundo o también conocidas como las hogueras de San Juan, festejaban el triunfo y la madurez del Sol, ya que en la *Navidad*, en el solsticio de invierno la noche más larga del año (día que la semilla comienza a germinar en el surco) fue celebrado también con fuegos y sacrificios para alimentar al Sol recién nacido. (Michell, 2002).

Por otra parte los egipcios dividieron el día en tres partes, según el movimiento aparente del sol en el cielo, para ellos dios Ra; según los momentos del viaje en su barca de fuego, encarnaba tres entidades diferentes: al amanecer era Jepry; al mediodía, Horajty y al anochecer, Atum. Tras derrotar a la maléfica serpiente Apófisis, la cual intentaba detener el avance de la barca, ascendía de nuevo al firmamento cada mañana. (Sánchez, 2001).

Pero lo que queremos resaltar son los métodos que usaban para medir el tiempo, por medio de la sombra que proyectaba el sol; usando un instrumento conocido como obelisco² (en el caso del observatorio muisca un falo. Ver figura 20) o por medio de un Gnomon que es un instrumento alargado cuya sombra se proyectaba sobre una escala graduada para medir el paso del tiempo según Sánchez (2001), y de esta manera y con una constante observación identificaban los solsticios y los equinoccios, la duración del día y de la noche por medio de sombras y la época del año en la que se encentraban.

² Es un monumento pétreo con forma de pilar, de sección cuadrada, con cuatro caras trapezoidales iguales, ligeramente convergentes, rematando superiormente en una pequeña pirámide denominada piramidón. Extraído de <http://es.wikipedia.org/wiki/Obelisco>



Figura 18: sombra que proyecta el monolito a las 3 de la tarde del mes de marzo.

Ahora bien situemos la mirada en Bogotá y determinemos de manera hipotética como se observaría la sombra de un obelisco en determinadas épocas del año. Para ello tomaremos como referencia las agujas que se encuentran ubicadas en el parque de los nevados en suba (figura 21), ya que estas señalan la salida del sol en los equinoccios y solsticios.



Figura 19: Agujas que indican el comienzo de los solsticios y de los equinoccios.
Tomado de <http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?p=100130554>

Como se ha mencionado la predicción de fenómenos celestes siempre ha inquietado a diversas personas a través de la historia como por ejemplos sacerdotes, reyes y científicos que ha permitido en avance de la astronomía. También lo ha hecho en diferentes culturas en la antigüedad, manifestando dicho interés por medio de asentamientos arqueológicos en donde se encuentra una relación entre las edificaciones y monolitos con la posición astronómica de algún cuerpo celeste, con la salida y puesta del sol y de la luna lo que ha llevado a la invención de nuevo campo de estudio que se conoce como arqueoastronomía; en donde se profundiza la forma en que se medía el tiempo en la antigüedad de una manera implícita pero que manifiesta esos conocimientos que tenían nuestros antepasados y su relación con el contexto que lo rodeaba.

4. CAPÍTULO. SOPORTE TEÓRICO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE (DIDÁCTICA).

Como profesores de matemáticas no se debe desligar la teoría de la práctica, aún más cuando se exhorta a la constante interacción del estudiante con su proceso de enseñanza y por tanto a la vinculación de un contexto próximo y que no sea ajeno a su realidad, ya sea social o de carácter académico. En este capítulo se resalta lo que se debe tener en cuenta en el momento de llevar un conocimiento al aula de clase y en este caso respecto a las funciones trigonométricas, en donde está inmersa la interacción del estudiante con su entorno.

4.1. Matemática y el contexto.

Dentro del marco histórico de como surgen y evoluciona las matemáticas poco se muestra de su origen o percepción primaria, dicha inspiración reside en la belleza de los números, formas, relaciones y la lógica que estructura dichas composiciones, a lo largo de los siglos se observa que la contemplación de la naturaleza y el entorno en que se desenvuelve genera un conocimiento que a lo largo de esta historia la encierran dentro de códigos y símbolos, que solo los iniciados de esta magna ciencia serán los que descifren y encuentren dicho conocimiento manifestado en un entorno dado. (Boyer, 1986)

El desarrollo de la sociedad está marcado por la superación de los problemas que día a día se presentan como prueba para la perfección de los esquemas de pensamiento humano y el mejoramiento de una sociedad, en donde la ciencia se plantea como una forma de conciencia dentro de marcos sociales y se apropia de dichos problema y los estructura para hallarles una solución a partir de proceso lógicos, cuyo resultado son esos conocimientos ordenados cuya veracidad se comprueba y se puntualiza constantemente en el curso de la practica social.

Dentro de ese conocimiento que se desarrolla para la solución de problemas se encuentra las matemáticas, que tiene una estructura, una lógica y se desarrolla a partir del estudio de la naturaleza.

La naturaleza como su nombre lo indica describe al mundo que nos rodea con toda su infinita diversidad de manifestaciones, teniendo el primer principio de los números, también se describe como realidad objetiva existente, aquí es donde surgen las nociones comunes del ser humano para la interpretación de fenómenos observables, como es el tiempo, el espacio, el orden y las estructuras. (Sánchez, 2001)

Dicha naturaleza sería nuestro contexto, nuestro entorno, el pequeño espacio que rodea nuestros sentidos, que al observar y comprender su estructura se desarrolla un conocimiento y una vez interactuado con ellos se logra comprender una ciencia con un contenido lógico. Los antiguos griegos representantes de una gran cultura y sociedad en el que es relevante su academia demostraban sus fundamentos matemáticos por medio de la geometría y está a su vez se recopilaba de la observación y la práctica con la naturaleza. Las matemáticas griegas reflejan un desarrollo científico por medio de la interacción con el contexto. (Piñeiro, Ibañes Jalon, & Ortega del Rincon, 1998)

En Egipto con la conceptualización geométrica de la vida, la representación de sus estructuras con formas poliédricas, la interacción con la naturaleza nos refleja que las matemáticas siempre han desarrollado la solución a las prácticas sociales para el progreso.

La concepción de los calendarios en Sumeria, el desarrollo de la variable en Arabia, y la traducción de algunos lenguajes antiguos son el resultado del incansable desarrollo y búsqueda del conocimiento que más adelante será denominado conocimiento científico.

Con Isaac Newton y su aplicación matemática a las leyes universales que rigen los eventos físicos se sigue señalando esa matemática práctica, donde es el contexto el recurso más importante. (Avetti, 1992)

En la antigüedad, cuando solo se percibía lo tangible y se describía el mundo se interpretaba en la vista del ojo humano. Pero en la edad media se descubre el mundo y se plasma lo que en la antigüedad se describía. La matemática se formaliza en la modernidad visualizándose por medio de un lenguaje abstracto y complejo, es por esto que el contexto es fundamental en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Para facilitar esa percepción de la importancia del contexto dentro de un ámbito educativo.

4.2. Ara Solis como Dispositivo didáctico

Este espacio de formación, permitió conocer y averiguar sobre este método de enseñanza y sobre la importancia del aprendizaje a partir de un experimento, un ambiente que los estudiantes generen interés por la exploración, el análisis, la argumentación y la participación activa de generar experimentos y conocimiento matemático.

Este hecho conduce a crear un dispositivo en el cual se involucre un ambiente, un contexto donde se puedan diseñar experimentos y posteriormente solucionar preguntas para profundizar, con el propósito de enseñar matemáticas, en particular la trigonometría. Dicho ambientes es crear un sitio arqueo-astronómico con fundamentos en la astronomía de posición y observación para el desarrollo del objeto matemático que es la función trigonométrica.

Los estándares básicos de educación en las matemáticas plantea la importancia de crear situaciones de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas para la vida, partiendo de un contexto social. (MEN, 2007)

Por esto la gestión del docente no solo está incluida dentro del aula, es importante para esto conocer los fundamentos teóricos de la didáctica que involucran al dispositivo como medio para el aprendizaje del estudiante, teniendo como base la situación de la enseñanza. En el desarrollo mental del niño es importante mencionar que los procesos de los primeros siete años existen varias fases de dicho desarrollo, pero es la intuición donde el niño, antes del lenguaje, tiene la manipulación y la acción, donde la denominada inteligencia sensorio-motriz genera técnicas que tendrán una gran reparación en una edad adulta, es por esto el estudio mediante dispositivos que interactúan en este medio, el niño genera niveles más avanzados de abstracción. (Piaget, 1991)

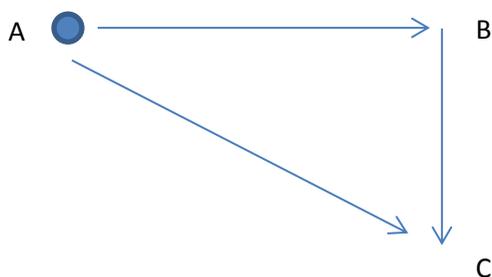
Es así como interviene desde temprana edad. Para el caso de los estudiantes que aprenden de trigonometría en la educación media, es importante que siga exploración con el medio, a su vez ya que la trigonometría es una gran rama de la matemáticas, importante precisar los contenidos que se quiera lograr con el dispositivo para el aprendizaje, lo anterior hace parte del proceso metodológico que el docente, necesita

para el análisis, Litwin (1997) menciona que la idea de un determinado campo temático como la trigonometría es necesario seleccionar los contenidos previos y conceptos para el desarrollo de un objeto matemático, esto ahonda las ideas, el proceso y el desarrollo para la comprensión, consecuentemente adaptar estos contenidos al dispositivo que se emplee.

Aunque no se determina un profundo desarrollo pedagógico al tratamiento de los dispositivos es importante precisar su definición, ya que no es la teoría, sino la forma de emplear el dispositivo dentro de una pedagogía activa (constructivismo), lo que genera el éxito del mismo. (Piaget, 1974)

Posteriormente Vergel, Rocha, & León (2008) menciona que un dispositivo didáctico es el componente de una propuesta didáctica que ayuda a la estimulación de los procesos, cognitivos y comunicativos de los estudiantes, este a su vez debe favorecer la acción de ellos al momento de abordar un problema para la resolución. Por esto mismo Jonassen (2000) afirma que la creación de entornos que faciliten este conocimiento al momento de la enseñanza y aprendizaje tiene que estar ligado con la realidad tangible y no una realidad ficticia, por ejemplo:

Hablar de una situación donde una hormiga que sabe de “trigonometría” se encuentra en una posición A y necesita llegar a una dirección C, sabiendo que existen dos caminos, ella descubre que el más corto es la hipotenusa.



No aplica un contexto real, porque no podremos saber que una hormiga sepa trigonometría, mucho menos que sepa el teorema de Pitágoras. Es por esto que se resalta el hecho de trabajar un hecho “REAL”.

Teniendo en cuenta la reconstrucción histórica de la formalización de la función seno y que se encuentra emparentada con los estándares curriculares propuestos por el MEN

(2007) para la educación media, se tendrán en cuenta para la selección de los elementos para el diseño del dispositivo didáctico.



Figura 20. Diagrama que resume los aspectos a tener en cuenta en el dispositivo didáctico

4.3. Enseñanza de la Trigonometría plana.

Para seguir profundizando en la importancia del contexto pero desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas mencionado por autores como, Brousseau (1986), D'Amore (2008) y los mismos Lineamientos Curriculares del MEN (1998) y en este caso como introducción al estudio de la trigonometría plana, es relevante comentar y como primera premisa el enfoque antropológico de la didáctica de las matemáticas, pues de acuerdo con Chevallard, Bosh, & Gascón (2006) Este enfoque hace referencia a que la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana como todas la demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción *de un sistema de conceptos*, como la utilización de un *lenguaje* o como un *proceso cognitivo*, ya que este conocimiento debe estar ligado al desarrollo y mejoramiento de una sociedad, tanto desde un ámbito científico como moral. Lo que se quiso resaltar con anterioridad.

Desde los Lineamientos Curriculares MEN (1998), la actividad matemática debe estar inmersa dentro de un proceso paulatino de interacción tanto con el conocimiento como con el contexto, ya que dicha interacción no debe ser vista como una dualidad en el que cada una se ve con dos lupas diferentes. En esto recae la importancia del uso del contexto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, asimismo afirma que

Tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (pp. 19).

Y es precisamente ese **contexto** el que debe servir como excusa para el planteamiento de situaciones problema que lleven al estudiante a tener un lugar dentro de su realidad, para interpretarla a través de un conocimiento como es el matemático. Que a su vez se convierte en un aprendizaje Significativo tanto para el estudiante como para el docente. (MEN, 1998)

Asimismo desde la teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau (1986) describe una situación didáctica como el conjunto de relaciones establecidas explícitas o implícitamente entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un cierto medio (que comprende instrumentos y objetos) y el profesor con el fin de llegar a la construcción de conocimiento que se da esencialmente dentro de unas *condiciones y contextos particulares mediados por un proceso o actividad científica* en el que se originan conjeturas, se hacen hipótesis, se prueban ideas, se cometen errores, se presentan dificultades y se generan interacciones.

Por tal motivo la enseñanza de la trigonometría debe estar cohesionada con el contexto en el que ésta surgió, para tener una mayor comprensión de los conocimientos puestos en juego dentro de un proceso de enseñanza y aprendizaje, como es el caso de la astronomía. Esto se profundizará en el protocolo de construcción de Ara Solis.

Paralelamente los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2007), hace referencia a tres estándares los cuales creemos relevantes en el momento de abordar la enseñanza de los fundamentos para el estudio de funciones trigonométricas:

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de figuras geométricas.
- Identifico características de localización de objetos geométricos.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras.

De manera implícita se hace referencia a esa interacción del estudiante con fenómenos observables y medibles, haciendo uso de instrumentos de medida que lo lleven a plantear conjeturas, para su posterior demostración y hacer uso de esas competencias matemáticas (formulación, tratamiento y resolución de problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos) que los llevan a la construcción del conocimiento.

Dentro de ese marco de la interpretación de fenómenos se hace uso de conocimientos previos para el acercamiento a unas primeras hipótesis, en el que se resalta un conocimiento geométrico, como primeros postulados que utilizaron los griegos para la interpretación de la realidad, como se resalta el libro de los ELEMENTOS DE EUCLIDES, en donde hay una formalización de ese conocimiento geométrico que había en esa época y donde todo es interpretado a partir de la geometría. Por ejemplo las magnitudes, múltiplos y submúltiplos en el libro V, además se menciona que hay trabajo sobre integrales en uno de sus libros. Asimismo identificaban dos tipos de universos los Pitagóricos el supralunar en donde todo está dado en tres dimensiones (geometría no Euclidea) e infralunar en el que todo está dado por puntos y líneas (geometría Euclidea). Asimismo todo en nuestro alrededor está hecho con formas geométricas (edificios, casas, parques)

Por tal motivo el estudio de la geometría es de suma importancia dentro del diseño de un currículo y como introducción para el estudio de cualquier contenido matemático, teniendo en cuenta nuestra propia experiencia como EPM, en el que se da un fuerte énfasis en el estudio de la geometría. Además resaltando una de las características importantes mencionadas en los Lineamientos Curriculares que es la implementación de la geometría activa en el aula de clase como herramienta de exploración y representación del espacio. La idea general de la geometría activa está basada en dar un papel protagónico y activo al estudiante donde él tenga que moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operativos el material para su conceptualización.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado Piñeiro, Ibañes Jalon, & Ortega del Rincon (1998), proponen una relación entre enseñanza de la geometría con la trigonometría. Y para especificar lo que estamos citando a UsisKin (1987), los contenidos de geometría Euclídea y la trigonometría no pueden separarse, por lo que describe cuatro dimensiones para el estudio de la geometría que también se pueden aplicar a la enseñanza de la trigonometría:

- *Visualización, dibujo y construcción de figuras*, teniendo en cuenta que la trigonometría trabaja en la solución de triángulos (trígono-triángulos y trigonometría-medida).
- *Estudio de aspectos especiales del mundo físico*, en este caso entra en juego la astronomía.
- *Uso de algún medio para representar los conceptos matemáticos no visuales y sus relaciones*, representaciones gráficas por medio de software.
- *Representación como un sistema matemático normal*, razones trigonométricas, como estudio de relaciones entre ángulos y lados de un triángulo.

Y continuando con las relaciones entre el estudio de la geometría y la trigonometría que proponen los autores ya mencionados, dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje, hacemos referencia también a los niveles de Van Hiele como una forma de interacción en situaciones que los estudiantes pueden vivir de manera práctica, como experiencias de aprendizaje y de las cuales los conocimientos aparezcan como la

solución óptima a los problemas propuestos. Este modelo de aprendizaje contempla cuatro niveles de aprendizaje:

- *Nivel 1: Visual. Los estudiantes identifican las formas y configuraciones de manera global, por su apariencia. Esto podremos relacionarlo con los tipos de triángulos y ángulos que se forma al relacionar varios puntos dentro de la bóveda celeste y su referencia con algún objeto en la tierra (monolitos)*
- *Nivel 2: descriptivo-analítico. Los estudiantes aprecian que las figuras están formadas por elementos y reconocen propiedades matemáticas de manera informal. Tipos de ángulos, tipos de triángulos, medidas y distancias, como relación entre ángulos y lados.*
- *Nivel 3: abstracción y clasificación. Aunque apoyado en una base manipulativa aquí comienza el razonamiento formal. Pueden entenderse demostraciones, pero no construirlas, y no llegan a comprender la estructura axiomática*
- *Nivel 4: deductivo-formal. Pueden realizarse demostraciones formales de varios pasos y comprender la estructura axiomática.*

Por otra parte pero sin perder de vista la manera de acercar al estudiante a un contexto en el que los contenidos matemáticos tienen una fuerte relevancia, un factor relevante es la implementación de nuevas tecnologías (animación) en el aula de clase para generar procesos de generalización y formalización del objeto matemático, este aspecto nos parece relevante pues según SED (2007) la implementación de recursos tecnológicos en clase de matemáticas considera que el estudiante sea capaz de:

- *Indagar, analizar y evaluar información*
- *Examinar estrategias para solución de problemas*
- *Reconocer distintas representaciones de objetos matemáticos*
- *Visualizar relaciones y estructuras conceptuales*
- *Identificar relaciones matemáticas en el desarrollo tecnológico*

De igual forma MEN (1998) menciona que las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen y enriquecen el currículo de matemáticas.

Finalmente otro aspecto que de una u otra forma es una orientación relevante para el diseño de la dispositivo didáctica para el estudio del objeto matemático (funciones trigonométricas) es analizar las “*dificultades*” que tienen los estudiantes al estudiar el objeto matemático, Montiel, E (2007) cita a De Kee quien hizo una investigación en 1996 acerca de la noción de seno y coseno en dos contextos, en el triángulo rectángulo y en el círculo trigonométrico. En el documento se mencionan diferentes niveles teniendo en cuenta el contexto de triangulo rectángulo, inicialmente se menciona la comprensión global que tuvieron los estudiantes con respecto al objeto matemático estudiado en dicha investigación

“...La comprensión global: el estudiante reconoce la relación trigonométrica como la relación entre los lados de un triángulo rectángulo o como la relación proporcional entre ellos, pero el termino trigonometría no hace alusión al concepto aprendido o su sentido en general...” (pp. 62)

El análisis hecho por la autora está dividido en momentos y sus respectivos niveles de comprensión, los cuales se mencionarán a continuación:

La comprensión inicial: el estudiante tenía los conceptos previos más importantes, pero en algunos casos se tomaba la hipotenusa como el lado más largo de un triángulo sin importar si este era rectángulo o no, de esto se desprende un uso inadecuado de las razones trigonométricas.

La comprensión del concepto: el estudiante no tienen dificultades en reconocer la razón que hay entre los lados de un triángulo rectángulo y en formar razones con ellas, incluso son capaces de tomar un número decimal asignado al seno y convertirlo en una fracción, la dificultad procede en ver este mismo valor decimal sobre el (hipotenusa).

La abstracción: al estudiante se les dificulta reconocer la invariabilidad de la razón trigonométrica cuando el triángulo es ampliado, reflejado, se traslada o se rota.

La formalización: el estudiante tienen un manejo adecuado de las razones trigonométricas en su trabajo con triángulos rectángulos, al resolver trabajos pueden definir el seno y el coseno aplicándolos adecuadamente.

Como conclusión de esta investigación la autora menciona la falta de significados en relación a los conceptos y la puesta en juego de dichos conceptos dentro de una situación problema, que el estudiante encuentra en la razón trigonométrica, una problemática importante en la enseñanza de las matemáticas y especialmente de la trigonometría.

Por tanto los estudiantes deben estar en continuo contacto con los conceptos matemáticos que se ponen en juego en la solución de situaciones problema, esto enmarcado dentro de un contexto en donde el conocimiento tenga relevancia, creando situaciones significativas para la construcción de conocimiento y según Miguel De Guzman (2007) El proceso de resolución del problema se asemeja a un juego de estrategias o toma de decisiones. En el que el conocimiento está al servicio del desarrollo integral de las personas como objetivo de la educación para el mejoramiento de una sociedad.

5. CAPÍTULO: EL AVANCE DE LA TECNOLOGÍA Y LA EDUCACIÓN

En este capítulo se muestra la importancia que tiene las nuevas tecnologías (TIC), dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este caso de la construcción de la función trigonométrica, destacando Ara Solis como un dispositivo que requiere de esas tecnologías (computador, software de libre acceso como Stellarium y Sketchup) para ser aplicado y de esta manera potencializar la interacción del estudiante con los elementos a tener en cuenta para la construcción del dispositivo.

5.1. El uso y la interpretación de tecnología en la enseñanza de la función trigonométrica.

Hablar de avances tecnológicos en el área de la electrónica en la actualidad parece algo común entre las personas, ya que acceder a la tecnología se hace indispensable para una sociedad ceñida por un estilo de vida regido por dichos avances, por ejemplo el uso del teléfono celular y del internet como formas de comunicación. En un mundo demarcado por la globalización y sistemas económicos de libre comercio dicho acceso a la tecnología se hace mucho más fácil, además identificando el hecho de demarcar la sociedad como una sociedad de la información y sociedad del conocimiento en el que dicho planteamiento nos lleva mirar un cambio en aspectos *sociales, culturales, económicos, políticos e institucionales*, implantando desde un sistema económico neoliberal (Burch, S.f.) Y por supuesto un cambio a nivel de la educación.

Centrando la mirada en el sector educativo y más específicamente en los **procesos de enseñanza y aprendizaje** dentro del aula de clase de matemáticas. Estos avances tecnológicos y especialmente el avance en sistemas informáticos como el uso de software, permiten y exigen un cambio en el paradigma educativo, que en palabras de Pedro Gómez (2009) “la tecnología electrónica (calculadoras gráficas y ordenadores) puede llegar a ser catalizador de los procesos de cambio en el aula de matemáticas”,(pp. 3) esto plantea una reestructuración dentro del currículo de matemáticas, según la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos NTCM (2003), además en formación de profesores como el acceso a dicha tecnología.

Desde esta perspectiva se resaltara el uso de las TIC para la enseñanza de la función trigonométrica, como un instrumento técnico³ desde el punto de vista de (Llinares, 2004) necesarios para realizar la “práctica”, como por ejemplo materiales didácticos, software didáctico, como el Cabri-Geómetre, Geogebra y podremos añadir a la lista las calculadoras y programadores, entre otros. Que permiten al profesor y a los estudiantes modelar las funciones e identificar regularidades y relaciones y presentar el conocimiento aplicado en la práctica y le permiten al *escolar vivir **experiencias matemáticas** que no sería posible vivir de otra manera*, desde el punto de vista didáctico. (Gómez, 2009).

Cabe resaltar que el uso de las Tic debe ser utilizado como un recurso para la comprensión de algún objeto matemático (función trigonométrica) y no desbordarse en el uso del instrumento técnico en palabras de Llinares, esto quiere decir que no se debe enfocar en la manera como se usa ya sea un software o una calculadora, sino en el comportamiento del objeto matemático como por ejemplo gráfica de las funciones. Real Perez (s.f.) Plantea dos aspectos para resaltar lo que se pretende aclarar:

- *Las TIC no son la panacea en educación. Debemos remarcar este punto y no caer en un error. Aunque pueden llegar a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, son solamente un recurso más.*
- *Las TIC no son el objetivo, sino un medio. En muchas ocasiones se puede llegar al error de acabar enseñándole a un alumno o alumna el manejo de determinadas aplicaciones en lugar del o los contenidos matemáticos que nos habíamos propuesto inicialmente.*

Claro está que el diseño de una actividad se debe estipular un tiempo para que el estudiante se relacione con el recurso didáctico que se va a trabajar, esto también relaciona los recursos tecnológicos.

Ahora bien desde la perspectiva de los estándares curriculares por competencias del MEN (2007) el estudiante debe desarrollar unas competencias (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.) que le permiten la comprensión de un contenido matemático, en donde el uso de las Tic juega un papel primordial. Ya que

³ Ver apartado 4.2. Dispositivo didáctico.

permiten al estudiante la modelación la función trigonométrica por medio de gráficas y tabulación de datos, así mismo facilita la organización y análisis de datos, hacer cálculos de forma exacta y eficiente, tomar decisiones y razonar para resolver un problema. NTCM (2003).

Esto se hace evidente en nuestra propia formación como EPM⁴, ya que en los diferentes espacios de formación el uso de software como Geogebra o Cabry, el Blog, Moodle, como por citar algunos casos. Nos permitía analizar el comportamiento de alguna función por mencionar un ejemplo matemático, ya sea en un espacio Euclideo o en un R^3 o quizás poder modelar una cuarta dimensión acercándonos a ese conocimiento que se aleja de la utilización de lápiz y papel, y de las construcciones con regla y compas, para llegar a la comprensión del objeto matemático puesto en juego.

Asimismo y como para profundizar, dichas tecnologías permiten explorar y trabajar dinámicamente en las diferentes representaciones de una estructura matemática, ofreciendo la posibilidad de nuevas experiencias, según Pedro Gómez (2009) proporcionando:

- La simulación de situaciones y explorar los efectos de cambio en las características de una situación. Por ejemplo, es posible observar los efectos gráficos del cambio Simular situaciones y explorar los efectos de cambios en el parámetro a en la representación simbólica de la función seno $f(x) = a \sin x$
- Realizar cálculos complejos. Por ejemplo, las nuevas calculadoras traen módulos algebraicos integrados (del estilo Maple) que permiten resolver simbólicamente ecuaciones de muchos tipos.
- Explorar la relación entre las estructuras matemáticas y los fenómenos para los que ellas pueden ser un modelo. Éste el caso del laboratorio basado en la calculadora de Texas Instruments (Ti, 2004c). Por ejemplo, en la Figura 1 se insinúa el uso de este dispositivo para explorar los aspectos matemáticos de la caída y el bote de una pelota (Ti, 2004b, pp 27-30). (pp. 2-3)

⁴ Estudiantes para Profesor de Matemáticas

Por tanto las Tic hace parte del contexto en el que se desenvuelve un estudiante, ya que la mayoría de ellos por los menos tienen Facebook, lo que quiere decir el acceso a un computador y el conocimiento de unas herramientas computacionales para la comunicación, no estamos hablando de analfabetas tecnológicos. Un reto para los profesores de matemáticas que debemos enfatizar nuestras clases en pro de la formación de personas a quienes la tecnología no les parezca algo ajeno a su realidad, por tal motivo debemos diseñar y desarrollar el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. (Gómez, 2009). Y en esto recae la importancia de Ara Solis como dispositivo didáctico, utilizando medios informáticos como stellarium y skitshup.

5.2. Stellarium una puerta al universo.

En un cielo como el de Bogotá en donde el clima varía tanto y que así como tiene noches sin nubes en el cielo, la mayor parte permanece nublado y dificulta la observación de aquellos puntos luminosos en la bóveda celeste, además de la contaminación visual que también obstaculiza dicha observación. Para este inconveniente se encuentra un software llamado Stellarium que se presenta como una puerta al universo.

Por medio del uso del programa Stellarium, se puede hacer un reconocimiento de ese cielo que tanta curiosidad ha suscitado a la humanidad a lo largo de toda la historia, mostrando las diferentes constelaciones con su grupo de estrellas que la componen, evidenciando una historia que se cuenta en cada figura dependiendo la cultura en la que esta sea observada (figura 32). También muestra los planetas, galaxias, cúmulos y algunos satélites que en ese momento se encuentren orbitando el hemisferio visible de la ciudad en donde se esté ubicado, ya que permite elegir la ciudad desde la cual se quiera observar cierta constelación o cuerpo celeste o ubicarse en determinado lugar conociendo su latitud y longitud.

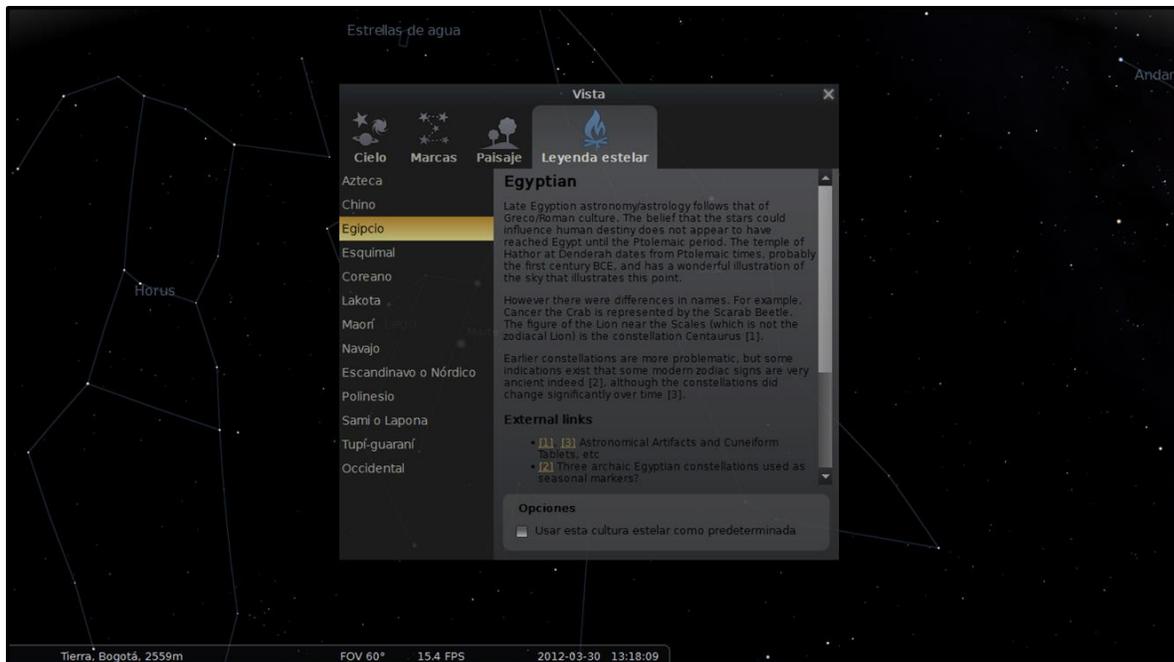


Figura 21: diferentes tipos de constelaciones según la cultura.

Se puede determinar la posición de los astros en cierta hora y fecha, a través de las coordenadas tanto horizontales como horarias y así mismo el movimiento de dicho astro, además determinar las magnitudes que se muestran como absolutas y aparentes, que es el brillo que tiene el astro en esa bóveda celeste. De esta manera el programa Stellarium nos acerca a ese inmenso universo que está lleno de misterios y del que aún queda mucho por descubrir.

Para hacer una mejor descripción de lo que puede hacer este programa se acudirá a un ejemplo específico, ubicando el lugar de observación en Tunja cuyas coordenadas son: Latitud Norte $5^{\circ} 33' 0.00''$ y longitud occidente $73^{\circ} 22' 12.01''$ según el programa, medidas muy próximas a las de Villa de Leyva la cuales son: Latitud Norte $5^{\circ} 38' 0''$ y Longitud occidente $73^{\circ} 32' 0''$ (medidas tomadas de Wikipedia). Como el programa tiene la opción de elegir la fecha y la hora en la que se desee hacer la observación, esta se fechará para el 21 de diciembre del 2012. Obsérvese que muestra el cielo a las 00:00 horas (ver figura 33).

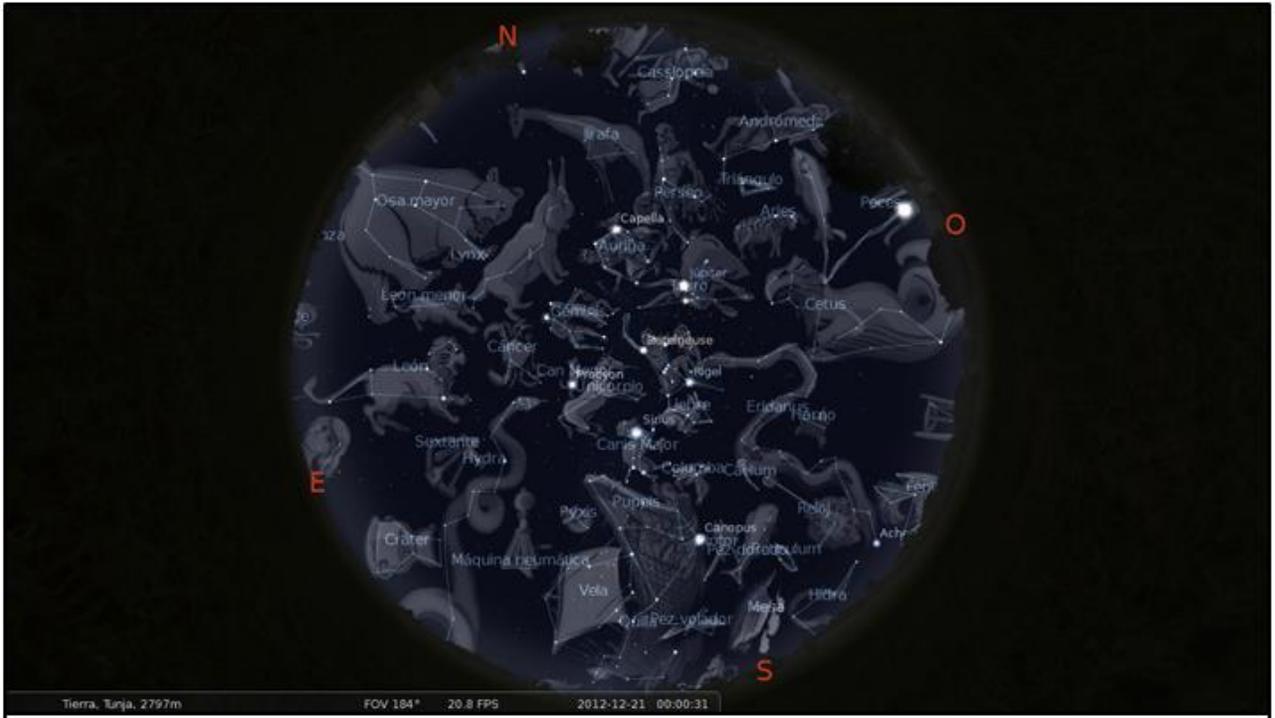


Figura 22: La bóveda celeste el 21 de diciembre a las 12 de la noche.

Ahora bien ubiquemos una constelación en este caso Orión, ya que en su paseo aparente por el cielo pasa muy cerca del zenit del espectador, (ver imagen 34), aprovechando que el programa muestra las 88 constelaciones, las diferentes estrellas que la componen, la forma que tienen y el nombre de dichas constelaciones. Y obsérvese la información que muestra Stellarium cuando se ubica sobre la estrella Betelgeuse (ver figura 35).



Figura 23: La constelación de Orión en el cenit del observador.

La información que proporciona de un cuerpo celeste el programa está ligado a las características que permiten identificar dicho astro, como su brillo y su posición astronómica, para que el observador pueda ubicar el astro en el cielo y la constelación a la cual pertenece, reconociendo regiones de la bóveda celeste que se resaltan por la cantidad de cuerpos que se encuentran allí. De esta manera en la imagen IV la estrella Betelgeuse presenta una magnitud 0.45 según el catálogo de Hiparco de Nicea y una magnitud absoluta de -5.14 que es un complemento del catálogo de Hiparco propuesto por... que está ligada a la distancia que se encuentra el astro del observador; entre más lejos se empieza a determinar en números negativos y si está más cerca en números positivos por ejemplo la Luna tiene una magnitud absoluta de 33.

Asimismo la posición astronómica está dada por medio de coordenadas horizontales, ecuatoriales geocéntricas y horarias, como se muestra en la imagen, determinando el ángulo horario y la declinación para el caso de las coordenadas horarias, el azimut y la altura para las coordenadas horizontales, y la ascensión recta y declinación, permitiendo al observador ubicar cualquier cuerpo celeste en una noche estrellada.

Paralelamente permite conocer el tipo espectral (brillo) del astro teniendo en cuenta la clasificación dada por la N.A.S.A., en la cual clasifican las estrellas según su temperatura (O, B, A, F, G, K, M) donde O es la más caliente y M la más fría, y su tamaño (Ia, Ib, II, III, IV, V, VI, ND) donde Ia son supergigantes extremadamente calientes y ND son enanas. Siendo el Sol una estrella tipo GII y Betelgeuse una tipo M2Ib, esto quiere decir que es de gran tamaño pero no es tan caliente, posiblemente de color rojo.

Por último la información que muestra el programa está ligada a las distancia del astro con respecto al observador, proporcionado la distancia en años luz que este caso es de 427.47 y el paralaje⁵

⁵ Ver apartado 3.3

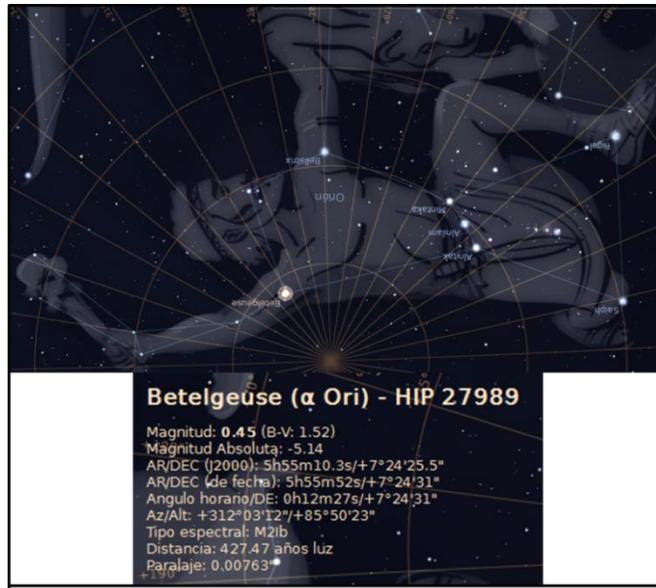


Figura 24: Información aportada por stellarium de la estrella Betelgeuse de la constelación de orión.

De esta manera aquellos curiosos que levantan su mirada hacia el cielo, descubren algo de lo que se encuentra en ese gran océano oscuro que en noches estrelladas pareciese que se le viene encima o que es absorbido por la inmensidad, permitiendo la ubicación de aquellas estrellas guías que como una brújula encaminan en ese recorrido que se hace en el cielo al observador (ver figura 36), presentándose Stellarium como una puerta que comunica con el universo.



Figura 25: algunas constelaciones (cruz de sur y centauro) que sirven para ubicar el sur.

6. CAPÍTULO: ANÁLISIS: PROTOCOLO DE CONSTRUCCIÓN DEL DISPOSITIVO DIDÁCTICO.

Este proyecto de grado fue creado a partir de unos de los temas tratados en la carrera de la L.E.B.E.M, según Jonassen (2000) llama la atención la creación de ambientes que puedan generar conocimiento, que por medio de los sentidos enlazados con un determinado contexto se pueda crear un conocimiento. Esta idea se forjó durante el desarrollo del espacio de formación de Taller de Ciencias Forero & Fonseca (2009) que está dentro del curriculum de estudio de la L.E.B.E.M. En este espacio de formación en la matemática que se le pedía al estudiante, consistía en crear un evento o experimento y teniendo en cuenta la guía del profesor, crear situaciones que tenga como objeto el análisis matemático del evento o experimento (creación de ambientes de conocimiento).

6.1. Las luciérnagas del cielo: lo que se observa en una noche de verano.

Cuando el Sol besa el horizonte y la noche empieza apoderarse de la ciudad en un cielo multicolor que comienza a teñirse de un color negruzco, pequeñas luces que como luciérnagas hacen su aparición adornando el paisaje nocturno. En esas ocasiones que se eleva la mirada al cielo se pueden observar como centellean puntos luminosos, pero realmente ¿Qué son estos puntos? ¿Qué hay en la bóveda celeste aparte de las estrellas? Pues a simple vista se tendría la impresión de que no existe nada más en el universo, pero actualmente sabemos que millones de estrellas forman parte de galaxias que se encuentran en procesos dinámicos para formar clúster de galaxias que en si constituyen el estado actual de lo que hoy en día llamamos universo. Esto nos hace recordar la famosa frase de Carl Sagan: “*Somos polvo de estrellas...*, Una mota solitaria en la inmensa oscuridad cósmica”.

Y siguiendo estas palabras es imposible que únicamente existan estrellas en un universo tan grande cuyo tamaño escapa a la imaginación de las personas, y a cuyas distancias solo accedemos por medio de la radiación electromagnética, como mensajes cifrados enviados desde todas partes del universo por medio de la luz, además resaltando el hecho que entre cada estrella (aunque parezcan todas pertenecer al mismo plano) es de

varios millones de años luz y que la velocidad de la luz es igual a $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Es cierto se queda uno perplejo ante el tamaño del universo.

Por tal motivo alguien que levante su mirada al cielo se encontrará con un universo desconocido, en donde Solo 5% pertenece a la materia visible, un 25% a la materia oscura y un 70% a la energía oscura. Aunque mucho se puede mencionar acerca de lo que se encuentra en el Universo, lo que ha sido estudiado y descrito desde tiempo inmemorables por diferentes culturas. De este cosmos que se sabe mucho pero a la vez no se sabe nada se hará una pequeña descripción de lo que se puede observar en una noche estrellada. Porque el cosmos “*es todo lo que es o lo que fue o lo que será alguna vez*” (Sagan, 1985)

Las estrellas, aquellos puntos luminosos que durante la noche hacen notar su presencia nacen de la condensación de nubes de gases y polvo estelar y llegan a convertirse en enormes esferas de gas incandescente auto gravitantes compuestas principalmente de Hidrógeno y Helio en cuyo interior se producen gigantescas reacciones termonucleares liberando en el espacio radiación electromagnética en todas las bandas del espectro con un comportamiento de cuerpo negro⁶. Entre estas se pueden encontrar diferentes tipos según su temperatura, las más calientes son azules (spica, Regulus y Vega) y les siguen las blancas (Deneb y Procyon), amarillas y naranja (Betelgeuse, Antares y Aldebarán) hasta las más frías de color rojo. Y su tamaño desde súper gigantes extremadamente calientes hasta enanas. Cabe apuntar que el Sol es de color naranja y no es de gran tamaño. (Puerta Restrepo, 1997).

Dicha luminosidad o potencia total radiada, permitió que el astrónomo y matemático griego Hiparco (160-124 a. de C.) realizara el primer catálogo de estrellas clasificándolas por magnitudes,) oscilando desde una primera magnitud que son las más brillantes a una sexta magnitud. Esta clasificación se utilizó por muchas centurias hasta que el abogado y astrónomo Johann Bayer publicó en el año 1603 su ***Uranometría***, un atlas del cielo en el que clasificaba las estrellas según su brillo por medio del alfabeto griego desde la más luminosa α hasta la última según fuera necesario utilizarlas, asignándoles además el nombre de las constelación en latín. (Puerta Restrepo, 1997).

⁶ Para mayor comprensión remitirse a: Aspectos físicos a considerar en la calibración radiométrica de imágenes satelitales; Camilo Delgado-Correal y José E. García
<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1207/1207.7329.pdf>

Hablar de las estrellas aunque parezcan que todas están a la misma distancia (ya se sabe que nos es así) y poder diferenciar unas de otras para ubicarse por ejemplo en alta mar y sin la ayuda de un radar, se remite a hablar de lo que se conoce como asterismo, que es un conjunto de estrellas cuyo movimiento es el mismo (de oriente a occidente) y hacia la misma dirección por tanto no presenta alteraciones a la vista del observador, también son conocidos como constelaciones, (ver figura 3) palabra que proviene del latín *com* que traduce reunión y *stellar* que traduce brillo.



Figura 26. Algunas constelaciones (orión, tauro, liebre, canis mayor, columba) que se pudo observar en la noche del 21 de diciembre del 2012, en Bogotá. Imagen tomada de Stellarium.

Diferentes culturas agruparon las estrellas en grupos diversos teniendo en cuenta su cosmogonía, tiempo después Claudio Ptolomeo realizó el primer catálogo con 48 constelaciones en siglo II d. de C. en el libro llamado el **Almagesto**. Cantidad que ha ido cambiando con el pasar de los años, ya que, con la fabricación de telescopios y las diferentes expediciones realizadas vía marítima durante los siglos XV Y XVI, se descubrieron nuevas constelaciones llegando a un número de 88, que son las que forman parte hoy día de las cartas celestes. (Sagan, 1985).

Asimismo acompañando en ese paseo aparente por el cielo nocturno, junto a las estrellas se encuentran los planetas que conforman el sistema Solar. Aunque en una observación a ojo desnudo fácilmente se pueden confundir con una estrella, se pueden diferenciar de

estas porque la luz proyectada no presenta alteraciones (no titilan o centellean), además estos no producen luz visible propia, esta es la proyectada por la luz del Sol. El más brillante de estos es Venus ($m = -4.08$), el cual es el tercer objeto más brillante de la bóveda celeste superado solamente por la Luna ($m=-11.42$) y el Sol (-26.72), por esta razón los mayas construyeron un templo específicamente para observarlo, además uno de los primeros estimativos de la distancia al Sol se realizó con un tránsito de Venus. El que le sigue en magnitud aparente es Júpiter (-2.21), Mercurio (-1.56), Marte (1.20), Saturno (1.35) y Urano (5.83) ya que se pueden observar a simple vista con visión 20/20, a diferencia de Neptuno (7.83) y Plutón (14.12), que escapan del alcance de observación a ojo desnudo.

El sistema Solar se formó hace más o menos 5000 millones de años, y se caracteriza por estar formado por ocho planetas rodeados de planetas enanos y demás objetos menores que conforman el llamado cinturón de Kuiper, los cuatro primeros (Mercurio, Venus, Tierra y Marte) los cuales están más cerca al Sol son pequeños y rocosos, los cuatro últimos (Júpiter, Saturno el planeta de los anillos, Urano Y Neptuno) que se encuentran a una distancia mayor, son gaseosos y grandes. (Puerta Restrepo, 1997).

Estos 8 planetas se mueven alrededor del Sol en orbitas elípticas, donde el astro rey es uno de los focos, como fue descrito en los trabajos realizados por el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler a finales del siglo XVI y comienzos del XVII, que cambiaron y fundamentaron el estudio de la astronomía. A su vez cada planeta tiene unos acompañantes durante ese recorrido de darle la vuelta al Sol. Se tratan de sus satélites naturales mejor conocidos popularmente como lunas, de los cuales el planeta Tierra cuenta con una (ver figura 4).



Figura 27. La luna en su cuarto creciente junto al planeta venus.

La Luna que tanta inspiración trae a los amantes del arte y a los enamorados que encuentran en ella a la musa de sus pasiones, es el segundo objeto más brillante en el cielo y al igual que los planetas refleja la luz del Sol, realizando un proceso que se denomina lunación; que comienza cuando la Luna se encuentra en la misma región del Sol y se conoce como Luna nueva, esta no es visible, ya que se nos presenta la cara no iluminada, posteriormente pasa a Luna creciente para que a los 14 días y medio después de la nueva y opuesta al Sol aparezca con todo su esplendor y con su cara totalmente iluminada la Luna llena, para después empezar a menguar hasta llegar de nuevo a Luna nueva. Este proceso tarda 29 días, 12 horas y 44 minutos. (Puerta Restrepo, 1997).

El movimiento aparente del Sol y la Luna han sido utilizados por diferentes culturas alrededor del mundo desde tiempos inmemoriales para servir de guía temporal de sus actividades rituales y de siembra como fue encontrado años atrás por Hawkins en Stongenge, U.K, y por Silva en parque arqueológico de Monquirá (el infiernito), Colombia.

6.2. La Arqueoastronomía: un viaje al pasado a través de una noche sempiterna.

Con el pasar del tiempo los arqueólogos han tenido que explorar en otros campos para hallar respuestas en la ubicación y en el asentamiento de diferentes edificaciones

arquitectónicas, el motivo de su existencia y la importancia que tenía para las culturas que habitaron estos lugares. Recurriendo a áreas como la historia, la astronomía, la química entre otras, dando origen a nuevas disciplinas y campos de estudio como la topoarqueología, que es la relación que hay entre alguna estructura antigua con algún lugar que se encuentra alrededor y el énfasis de este escrito que es conocida como arqueoastronomía como por citar dos ejemplos. (Quijano, 2008)

La arqueoastronomía es el estudio de asentamientos arqueológicos de antiguas civilizaciones, en las que se resalta una ubicación astronómica especial, como es el caso de Stonehenge en Inglaterra Hawkins (1987), Newgrange en Irlanda, las pirámides de Egipto, la ubicación de algunos templos como el de Atenas en Grecia, Michell (2002), las estatuas de la isla de Pascua de la cultura Rapa Nui Liller (1996) y las pirámides y el calendario construidas por la cultura Maya, Ospina de la Roche (2001). Son algunos ejemplos del interés que suscitó la observación del cielo en las culturas antiguas y aún más la representación de los ciclos Lunares, Solares, el movimiento de los planetas y de las estrellas por medio de los asentamientos en piedra como evidencia de la influencia de los fenómenos celestes en la vida de estas comunidades. (Belomonte, 2005).

Los antiguos expresaron todos sus conocimientos de forma emblemática, en el trazado de sus templos no solo en los planos, sino también en la relación astronómicas entre sus emplazamientos. Wood. J. (s.f.) citado por Michell (2002). Una de las principales evidencias que expresa esta afirmación se encuentra develada en el trabajo de una de las principales investigaciones que se ha hecho en arqueoastronomía de Gerald Hawkins, en donde a través de un libro llamado Stonehenge decoded da a conocer la relación astronómica que tiene Stonehenge con algunos cuerpos celestes especialmente con los movimientos del Sol y la Luna.

Por su parte la arqueología es la rama de estudio que analiza los restos materiales para comprender las sociedades prehistóricas, en las cuales no se encuentra un registro textual, sino por medio de imágenes, contracciones y restos de materiales específicos. En el caso de Stonehenge además de los materiales y los elementos que allí se encuentran para el estudio y composición de este monumento. Otro factor importante que se desarrolla ahí es el **diseño**; ¿cómo está ubicada su forma circular?, la estipulación de los agujeros, la posición de los altares, el sentido místico que le impregnaban allí dentro de los estudios arqueológicos era tan presentes que casualmente se comprobaban con los astros del firmamento. El estudio de la astronomía, no indica generalización de la comprensión de la

vida y en la antigüedad el significado era muy significativo. Es decir que aquí el trabajo arqueológico implica un trabajo astronómico.

Stonehenge que ha sido uno de los mayores misterios de la humanidad, pues se carecía de información para conocer quien construyó este asentamiento arqueológico y con qué finalidad, algunos afirmaban que se trataba de una construcción de Druidas antiguos sacerdotes de la cultura celta, pero estudios recientes ha demostrado que se trata de una construcción de más de 2000 años antes que apareciera dicha cultura.

Los estudios arqueológicos de los monumentos que se erigieron durante la época del neolítico en el Reino Unido, nos han demostrado la existencia de pueblos, que hacían uso de los fenómenos naturales como excusa para adorar a sus dioses, considerados como los padres de la vida de aquellas culturas. El Sol y la Luna en su comportamiento físico, genera como consecuencia la vida en la tierra y han puesto en manifiesto estas civilizaciones deliberada en muchos monumentos, que resaltan por ejemplo la salida y la entrada del Sol, su comportamiento en algún tiempo del año como en los equinoccios y en los Solsticios. El astrónomo Sir Norman Lockier encontró varias relaciones como la alineación de la piedra altar y la piedra talón con la salida del Sol en el Solsticio de verano, disipando una bruma llena de misterios que se apoderó de la mente de las personas por mucho tiempo. Stonehenge es un observatorio astronómico.

Stonehenge esta Localizado a 100 km al oeste de Londres, en la llanura de Salisbury y ante los ojos del espectador es un conjunto de piedras de grandes proporciones en donde se encuentra una puesta sobre otra, formando unas grandes puertas pero ¿para que ingrese o salga quién? Dichos monolitos que son los bloques de piedra verticales están coronados por dinteles a 4 o 5 metros de altura cuyo conjunto es denominado trilitos. (Michell, 2002). Este sitio está conformado como lo muestra la siguiente figura (22).

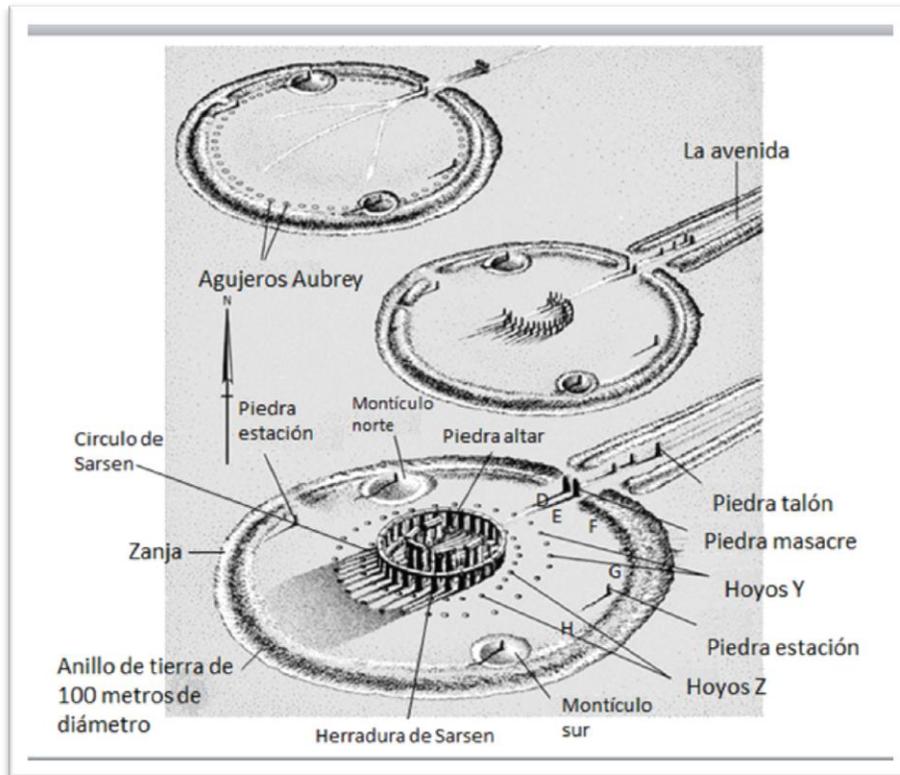


Figura 28: Representación del sitio arqueoastronómico Stonehenge. Imagen tomada y modificada de <http://abyss.uoregon.edu/~js/glossary/stonehenge.html>.

El astrónomo Gerald Hawkins⁷ planteó la posibilidad de que Stonehenge fuera utilizado como una calculadora astronómica para predecir los eclipses de Sol y de Luna, además de adoratorio de los doce dioses del zodiaco, trabajo planteado en su libro Stonehenge Decoded⁸. También de los alineamientos de los monolitos con las salidas o puestas del en los equinoccios y los Solsticios, Hawkins hizo un estudio y determinó la precisión con respecto a la posición de la Luna en ciertas épocas del año. Esto quiere decir que los constructores neolíticos⁹ no Solo se preocuparon por la observación del Sol sino que

⁷Fue un astrónomo inglés famoso por su trabajo en el campo de la arqueoastronomía. Nació en Great Yarmouth y estudió física y matemáticas en la Universidad de Nottingham. En 1952 se doctoró en radioastronomía, bajo la tutela de Sir Bernard Lovell en la Universidad de Mánchester.

⁸ Stonehenge decodificado.

⁹ Es la etapa prehistórica que se desarrolla desde el año 7000 a.C. hasta aproximadamente el año 3000 a.C., donde el hombre ya conoce el fuego, viste su cuerpo, aunque ahora va remplazando progresivamente los cueros por tejidos, ornamentando su figura con collares, ajorcas y brazaletes, y construye sencillas viviendas. Esta es la etapa de la piedra pulida, y en la que el hombre elige el sedentarismo como forma de vida, al crear técnicas para el cultivo de los suelos, y la domesticación de animales que le aportaron carne y leche.

también por los movimientos de la Luna, donde se establece ciclos o intervalos de tiempo donde la Luna coincide con una piedra.

Hawkins consideró a Stonehenge como una calculadora del neolítico, ya que a partir de los movimientos de unas piedras móviles sobre los agujeros Aubrey, se podría calcular la aparición de la Luna o del Sol en determinado punto en el horizonte y por ende también podrían calcular cuando ocurriría un eclipse ya sea de Sol o de Luna.

Ya habiendo encontrado algunas relaciones respecto a la posición de algún monolito con respecto a la posición del Sol en las diferentes estaciones que tiene el año (ver imagen 2), a partir de observaciones y de cálculos, ya que los cuerpos celestes presentan movimientos regulares y periódicos entre ellos el Sol; como por ejemplo y más próximo a nuestro entorno se puede observar desde la plaza de Bolívar de Bogotá el movimiento del Sol en un año hacia la salida del Sol, y se puede dar cuenta que el Sol presenta un movimiento cíclico. Se empieza la observación (ver figura 23) desde el Solsticio de Junio el Sol hace su aparición por el cerro de Monserrate, en el equinoccio de septiembre por el cañón entre el cerro de Monserrate y de la Virgen de Guadalupe y en el Solsticio de diciembre por el cerro de La virgen de Guadalupe, para retornar y volver hacer le ciclo. (Izquierdo, 2008).

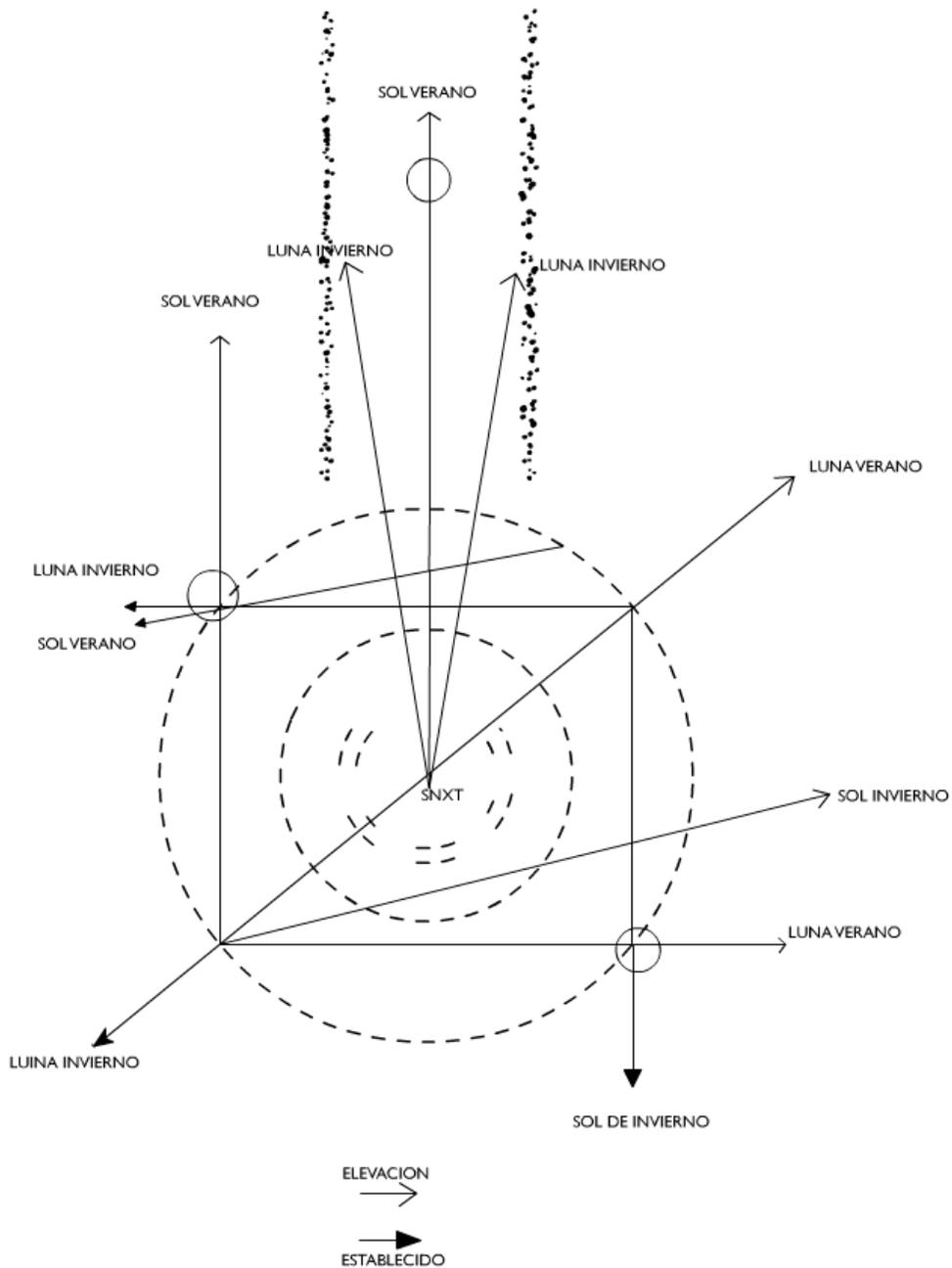


Figura 29: Representación de la salida del sol y la luna en solsticios y equinoccios.

Por consiguiente determinar las salidas del Sol es mucho más sencillo que las de la Luna que son más irregulares durante un año, por tal motivo Hawkins se dedicó a trabajar también con los movimientos de la Luna encontrando periodos cíclicos o intervalos de tiempo en donde la Luna se alienaría con alguna piedra en cierta época del año en Stonehenge.

Hawkins estableció un periodo de 19, 19 y 18 años en que la Luna tarda en recorrer y en alinearse, por el punto A, el punto B y Heel Stone, con una ocurrencia de 20, 20 y 40 cada 18 años y con una ocurrencia de 39, 40 y 66 cada 19 años un 62%, asimismo presenta otro intervalo de tiempo en el que Luna igualmente concurrirá con los puntos ya mencionados que es cada 37 o 38 años, con una concurrencia 30, 40 y 80 un 70% de probabilidad de ocurrencia. De lo anterior se puede deducir que la Luna tiene el doble de ocurrencia de alienación con la piedra talón (heel stone).

Pero el profesor se dio cuenta que dichas cuantas presentaban también un desfase, en los periodos de tiempo, puesto que la aparición de la Luna cambiaba con el paso de cada año respectivamente y presentaba irregularidades en la alineación con las piedras F,D o la heel Stone, pasando dicho intervalo de tiempo a un total de 56 años en donde la probabilidad es de 84% determinando de este manera que la Luna presenta un periodo de tiempo en el cual se alinea de una manera más precisa a medida que los días trascurren.

Dicho periodo de tiempo coincide con los 56 agujeros de Aubrey que rodean el círculo de Sarsen, y aunque estos no se alinean con ningún movimiento de la Luna o del Sol, se puede calcular a partir de estos la aparición de alguno de los astros sobre el horizonte, y se propone el siguiente ejemplo: *“se toman tres piedras blancas, a, b, c y se establecen sobre los agujeros 56, 38 y 19. Hacemos tres piedras negras, x, y, z, y se establecen en los agujeros 47, 28 y 10”* nótese que la diferencia entre cada uno de los agujeros en los que se coloca las piedras es de 10, 9, 9, 10, 9, 9, unos de los intervalos de tiempo en que la Luna coincide sobre la heel Stone. *“cambiar la posición de cada piedra alrededor del círculo cada año, por ejemplo desde el Solsticio de verano o de invierno”* (ver figura 24).

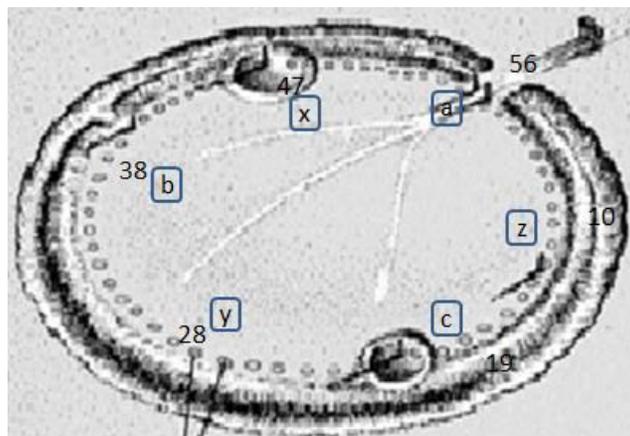


Figura 30: Agujeros Aubrey para ubicación del Sol o de la Luna.

De esta manera con el movimiento de las piedras se podrán predecir los alineamientos sobre las piedras D, F, la heel Stone, además de poder calcular los cambios de Luna durante sus fases de Luna nueva a Luna llena con una duración de 28 a 56 días, el siguiente ejemplo aclarará aún mejor el uso de este cálculo con los agujeros de Aubrey (*¿Cuándo se levantará la Luna llena sobre la heel Stone en el Solsticio de verano? La respuesta es: cuando cualquier piedra este sobre el agujero 56 (es lógico marcar el agujero 56 porque se alinea con la heel Stone visto desde el centro)*). De esta manera se repite el ciclo de 10, 9, 9 años, periodo en el cual la Luna se alinea con la heel Stone.

Asimismo la piedra en el agujero 56 predice además el año en que un eclipse de Sol o de Luna ocurrirá, dentro de 15 días de la mitad del invierno, el mes del invierno de la Luna, por los movimientos periódicos de los cuerpos celestes. “también puede predecir los eclipses de Luna en verano.” Por consiguiente dichos predicciones están dadas para los Solsticios tanto de verano como de invierno.

Por consiguiente Stonehenge es un observatorio astronómico que abre sus puertas a la luz del Sol o de la Luna; determinando alineaciones en los Solsticios y equinoccios; permite encontrar periodos de tiempo en que la Luna se levantará sobre el horizonte alineándose sobre las piedras ya sea, D, F y heel Stone; determinar las fases de la Luna y los eclipses de Sol y de Luna. Y en palabras de Izquierdo “*Stonehenge se nos muestra como un emplazamiento astronómico-ritual, testimonios de una necesidad observacional por parte de gentes cuya vida estaba íntimamente integrada con la naturaleza y sus ciclos, que nos advierte de lo poco que sabemos de los habitantes neolíticos del norte de Europa*”. Hawkins además nos muestra por medio de cálculos los ciclos que tiene la Luna el cual se asocia con el periodo metónicos que se relaciona con el periodo que tiene la Luna de 19 años. En astronomía y con el establecimiento de los calendarios, el ciclo de Metón¹⁰ o ciclo metónico es un común múltiplo aproximativo de los periodos orbitales de la Tierra y de la Luna. En efecto, 19 años tropicales y 235 meses sinódicos no difieren más que en 2 horas; de ahí que después de 19 años, las mismas fechas del año correspondan con las mismas fases de la Luna.

Aunque Hawkins referencie que hace falta una máquina del tiempo para probar lo que él afirma, también es cierto que propone una posición de Stonehenge como un observatorio astronómico y por tanto un trabajo de arqueo-astronomía, que abre la puerta a los

¹⁰ Fue un matemático, astrónomo, geómetra, e ingeniero que vivió en Atenas en el siglo V a. C. Es más conocido por su ciclo metónico de 19 años que introdujo en 432 a. C.

conocimientos de los antiguos sobre el firmamento y sobre la interpretación que tenían de los cuerpos celestes, aunque aún hoy en día este noche perpetua llamado universo está llena de misterios.

Ahora bien resaltando lo anterior y situando la mirada en nuestro país, ¿qué estudios de arqueoastronomía se han realizado?, y aun sabiendo que existieron y existen, comunidades indígenas de un gran conocimiento cosmogónico, astronómico y astrológico que hacen una interpretación de los fenómenos celestes y de la misma creación. Para ello se hará referencia al trabajo realizado en el capítulo de asqueo-astronomía escrito por Izquierdo Pena Manuel en el libro de astronomía para todos de la universidad nacional.

Aunque el arqueólogo hace varias referencias de distintos lugares que tienen una relación arqueoastronómica, se enfatizará en el trabajo realizado en el parque arqueológico de san Austin. Trabajo mencionado en el capítulo del libro y el un video publicado por la universidad nacional llamado los astrónomos de piedra.

San Agustín está ubicado al sur del departamento del Huila sobre el majestuoso relieve de los Andes colombianos, específicamente en la cordillera oriental a 1730 metros sobre el nivel del mar, en las estribaciones del ponderado Macizo Colombiano desde donde fluye la más significativa riqueza hídrica de Colombia y una Posición Astronómica privilegia puesto que se pueden observar los dos hemisferios celestes que está dada así: Latitud norte $1^{\circ} 3''$ Longitud oeste $76^{\circ} 16''$. (Elorza, 2007).

Ahora bien en las exploraciones y excavaciones realizadas en este parque arqueológico, testigo fiel de la cultura que habitó este parte de nuestro país, se habla de un desarrollo intelectual si a detenerse en cuenta que trabajaron con instrumentos primitivos según Juan Freide y matemático para la ubicación y realización de las esculturas que se encuentran allí. Según el trabajo de investigación realizado por Urbano (2010).

Para empezar a observar el componente astronómico que tiene este lugar, se tendrá en cuenta 3 lugares de gran importancia arqueológica para determinar sus características astronómicas, los cuales son; el parque arqueológico, el alto de los ídolos y el alto de las piedras. El alto de los ídolos está compuesto por dos colinas que artificialmente fueron aplanadas y unidas por un terraplén¹¹ que curiosamente tiene forma de media Luna,

¹¹ Terraplén: macizo de tierra con que se rellena un hueco, o que se levanta para hacer una defensa, un camino u otra obra semejante. Tomado de RAE.

este lugar fue principalmente un centro funerario en donde se construyeron montículos que contienen tubas y esculturas. Se resalta que la cultura de San Agustín tenía la habilidad de remodelar el lugar a su acomodo, pero hay una estatua de más de 5 metros que no ha sido removida, el cual se denomina el guardián y está mirando hacia el terraplén que se encuentra alineado con unos montículos según las salida del Sol en el Solsticio de junio. (Izquierdo, 2008). (Ver imagen 25)



Figura 31. Salida del sol en el solsticio de verano por el terraplén en el parque arqueológico de San Agustín.

Asimismo se encuentran varias alineaciones de montículos en la parte occidental de la meseta del alto de los ídolos, que apuntan hacia la salida del Sol en el Solsticio de diciembre y hacia el atardecer del Solsticio de junio. (Izquierdo, 2008). (Ver imagen 26).

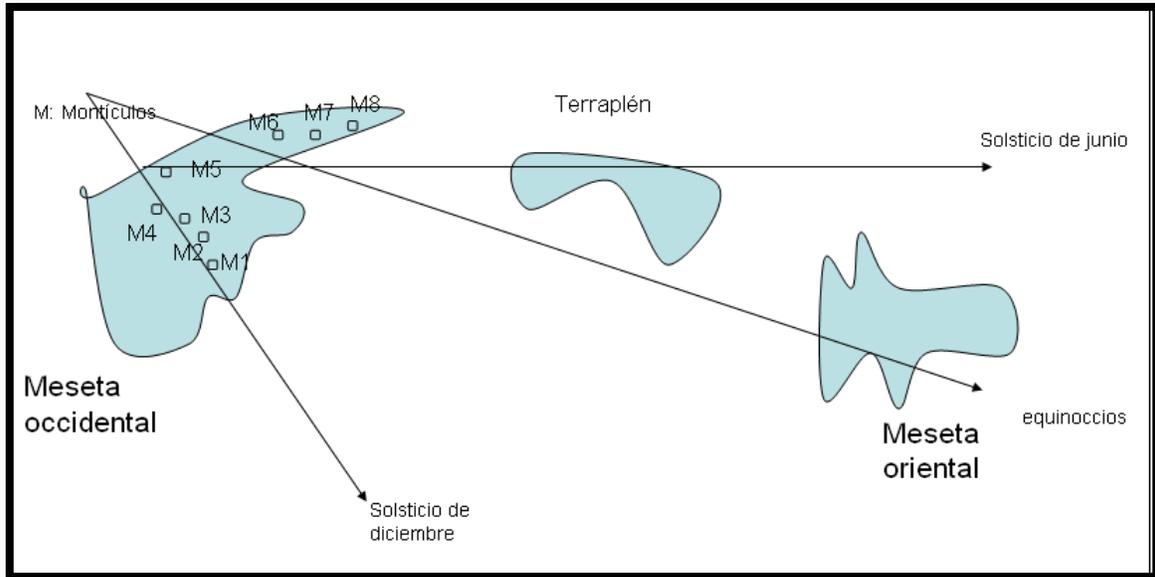


Figura 32: Representación de la salida del sol en los diferentes solsticios y equinoccios, en el parque arqueológico de San Agustín.

Además del alto de los ídolos, a 3 km de San Agustín en el cañón del río Magdalena se encuentra un afloramiento de roca natural, que fue aprovechado por la cultura San Agustín para tallar en estas piedras diferentes figuras en forma de animales y formas antropomorfas¹², en donde se resalta un inmenso monolito¹³ de cuatro caras llamado “la chaquirá” que apuntan a los 4 puntos cardinales de la tierra, y en las cuales se encuentra tallado una figura de sexo masculino en su cara norte, una figura de sexo femenino en la cara sur, una figura asexuada hacia el oriente y hacia el occidente no se encuentra nada tallado. En rocas circundantes fueron tallados figuras zoomorfas¹⁴ que apuntan hacia algún punto de los Solsticios de junio y diciembre en el horizonte o cualquier movimiento del astro. (Izquierdo, 2008).

Asimismo se encontró una relación acimutal de la ubicación de las estatuas y algunas tumbas con la posición del amanecer del Sol para equinoccios y Solsticios, y además se

¹² Entiéndase por antropomorfa una figura que tiene rasgos humanos. Tomado de la RAE

¹³ Monolito: es un bloque de piedra de gran tamaño, compuesto de un solo elemento. Por extensión, se utiliza este término para referirse tanto a los monolitos de origen natural como a los realizados y tallados por el hombre. Los monolitos naturales están formados por una única roca individual, que la erosión normalmente ha dejado expuesta y que en su mayoría es dura y sólida. Extraído de <http://es.wikipedia.org/wiki/Monolito>

¹⁴ Entiéndase por zoomorfa una figura con formas de animales. Tomado de la RAE

encontraron unidades funerarias que marcaban los cuatro puntos cardinales de la tierra. Pero no solo observaron el movimiento del Sol, también de algunas estrellas que aparecían en la dirección de los equinoccios y de los Solsticios días antes que el Sol lo hiciera, como anunciantes de fiestas en relación con el amanecer del Sol en dichas fechas. (Betancur, 2006).

Ya habiendo encontrado una relación del asentamiento arqueológico de San Agustín con el componente astronómico, se mirará a grandes rasgos algunos datos importantes sobre la cultura de San Agustín, que proporcionen ciertos indicios sobre la forma en que la astronomía influía en la vida de esta cultura, resaltado el hecho de las alineaciones encontradas en torno a los puntos cardinales de la tierra y las salidas del Sol en los equinoccios y Solsticios.

Se menciona en el video “astrónomos de piedra” realizado por la universidad nacional que la cultura Agustiniana vivió una época de esplendor entre los años 200 a. C. y 800 d. C. Concentrándose principalmente en el territorio que actualmente ocupan los municipios de San Agustín y San José de Isnos, vivió principalmente de la agricultura y llegó a tener una compleja organización social encabezada al parecer por una élite de chamanes que sustentó su poder con un amplio conocimiento de la naturaleza.

Cabe destacar que las excavaciones arqueológicas destacan una gran presencia de tumbas que revestidas con grandes lajas de piedra, algunas, las principales, cubiertas con montículos artificiales coronados con templete funerarios, las fuentes ceremoniales labradas en la roca viva, reflejan una adelantada organización del trabajo y una estratificación social y política. La escultura, en particular, indica claramente una verdadera especialización del trabajo, ya que esta actividad, dado el grado de complejidad y de adelanto que alcanzaron sus artífices, supone una gran habilidad profesional, un notable talento artístico y en especial un profundo conocimiento de las creencias mágico-religiosas de la tribu, a través de una larga tradición de tales manifestaciones religiosas. (Fajardo, 1997).

De esta manera se podrían plantear algunas hipótesis que constatarían que el asentamiento arqueológico de San Agustín tiene características arqueo-astronómicas:

1. Muchas de las estatuarias que están sobre tumbas y los campos funerarios, están orientados hacia la posición del Sol en puntos específicos como lo son los

equinoccios y los Solsticios, de esta manera se podría intuir la importancia que tenía el Sol como promotor de la vida y que nace al comienzo del día y muere al llegar la tarde, pero que vuelve y nace al siguiente día y así sucesivamente marcando la vida de las personas y el conocimiento cosmogónico, y por esta razón se les divinizó en muchas culturas del mundo antiguo. Entendiendo que en el Solsticio de junio el Sol calienta con más fuerza en algunos lugares de la tierra puesta que entran en la estación de verano, tal vez esto haya influido en la realización de alguna fiesta ancestral de tributo a los muertos o de veneración a la fuerza del dios Sol. (Michell, 2002).

2. Las cultura se San Agustín tenía un comportamiento agrícola como muchas de culturas indígenas de nuestro país, es posible que ubicación de las estatuas o el terraplén este dados para iniciar la temporadas de cosecha de algún producto. (Ramírez Eras, 2001)

3. Como última podría ser que la ubicación hacia los puntos equinociales o del Solsticio dieran comienzo a una serie de actividades, teniendo en cuenta la cantidad de estatuarias encontradas, las múltiples figuras talladas y el hecho de ser una cultura que como ya se menciona estaba reordenando el lugar a su acomodo. (Michell, 2002).

Pero la evidencia más cercana son las tumbas y sepulcros funerarios apuntando hacia los puntos ya mencionados con anterioridad, en donde se puede establecer una relación entre estos y con algún tipo de fiesta o ritual en estas fechas especiales.

6.3. ¿Porque Villa de Leyva? Entre la bóveda celeste y la tierra. El observatorio astronómico Muisca “el infiernito”.

En varias ocasiones se ha mencionado la riqueza astronómica presente en el municipio de Villa de Leyva (Boyacá), en el que se ha resaltado su ubicación geográfica, en una zona que tiene unas características semiáridas y por tanto una gran posibilidad de observar la bóveda celeste con mayor claridad, además del festival de astronomía que se realiza cada año, que se muestra en la siguiente imagen que fue la publicidad para el encuentro realizado en este año y por último a tratar en esta parte de la investigación, el

observatorio astronómico Muisca conocido como el infiernito¹⁵ que se encuentra en las coordenadas geo-astronómicas Latitud Norte 5° 38' 50.63" y longitud occidente 73° 33' 31.40".



Figura 33: Poster de invitación al encuentro de astronomía en Villa de Leyva. Febrero 2011.

Pero ¿qué hace a este lugar un observatorio astronómico? Antes de dar solución a la pregunta planteada, primero se debe caracterizar el lugar, empezando por quienes fueron los que establecieron esta serie de figuras líticas allí. Según diversos estudios de lo que se ha encontrado en lugares circunvecinos y en el mismo observatorio, como por ejemplo la forma rectangulares de los monolitos y las columnas, de la cerámica y la orfebrería, de los elementos de hueso y de concha de mar, los utensilios de piedra y los mismo que las prácticas culturales y religiosas “*todo lo cual, siendo como en efecto lo es, de acuerdo con todos los contextos, propios de los chibchas o muisca no da lugar a dudas de que estos nativos fueron los artífices de las admirables construcciones talladas en piedra tanto en Villa de Leyva como en Sutamarchan...*” (Silva, Investigaciones arqueológicas en Villa de Leyva, 1981). De tal manera que la distribución, la forma y el tamaño de los monolitos que se encuentran allí, den indicios de un posicionamiento con características astronómicas, para ello se tomará como referencia las investigaciones realizadas por el antropólogo colombiano Silva Eliecer Celis y que los pone de manifiesto en dos publicaciones realizadas en dos revistas, la primera en un boletín del museo del oro en

¹⁵Nombre dado por los españoles por las formas fálicas que tienen los monolitos en este lugar, en la época del descubrimiento.

1981 y la segunda en las memorias del segundo congreso de antropología realizado en la universidad nacional de Medellín (Antioquia) en 1983.

El lugar que el señor Silva divide en dos sectores; sector sur y sector norte, se encuentran una serie de monolitos¹⁶ se caracterizan por sus formas fálicas cilíndricas, unos están erguidos y otros ya reposan en el suelo, pero también se encuentran con formas “*plano rectangulares y de silueta sensiblemente rectangular u ovoidal. En estos últimos casos, la forma fue generalmente determinada por la natural del bloque lítico elegido para su talla*” (Silva, 1987). Su tamaño varía desde 1,80 metros hasta 4,50 metros y 5,00 metros aproximadamente. Como lo muestra la figura 27. En la que se puede hacer una comparación del tamaño del monolito, con el guía de observatorio Muisca¹⁷.



¹⁶Monolito: es un bloque de piedra de gran tamaño, compuesto de un Solo elemento. Por extensión, se utiliza este término para referirse tanto a los monolitos de origen natural como a los realizados y tallados por el hombre. Los monolitos naturales están formados por una única roca individual, que la erosión normalmente ha dejado expuesta y que en su mayoría es dura y sólida. Extraído de <http://es.wikipedia.org/wiki/Monolito>

¹⁷El observatorio astronómico o el infiernito, es también conocido como parque arqueológico Monquirá.

Figura 34: Comparación del tamaño de un monolito con respecto a una persona.

Otra característica que vale la pena resaltar es la asociación directa e indirecta tanto a las columnas y monolitos de las estructuras arqueológicas rectangulares que nos presenta Silva, que dan la impresión de haber sido colocadas siguiendo un patrón de medida con una funcionalidad específica, siguiendo el rastro de algo en particular ¿tal vez de los movimientos del Sol o de la Luna? Como lo muestra la figura 29.



Figura 35: alineación de los monolitos para la observación del movimiento del sol, por medio de las sombras.

Silva divide el observatorio en dos campos sagrados, el sector sur y el sector norte, que los denomina campos sagrados de observación astronómica y meteorológica y, al mismo tiempo como centros ceremoniales y de culto al Sol, lo que se conoce como arque-astronomía; que son asentamientos arqueológicos con unas características en sus posicionamientos a nivel astronómico, resaltándose la observación y conocimiento de la bóveda celeste por parte de las culturas antiguas, y la influencia de dicha observación en la vida de las culturas, ya sea nivel de la agricultura o a nivel de ritos y ceremonias religiosas, para fortalecimiento y progreso de la comunidad. (Michell, 2002).

Para encontrar dicha caracterización el arqueólogo Silva, presentan una serie de hechos y testimonios que llevan a pensar al infiernito como un observatorio astronómico Muisca, de los cuales se hará mención de aquellos que muestren evidencia por medio de la observación y la comparación de movimientos del Sol y la Luna con la ubicación de los monolitos y de algunas constelación si es que se hace alusión de ellas.

1. Se hace alusión de la ubicación exacta de este a oeste, de las estructuras las cuáles no *“la hubieran podido lograr los chibchas sin el previo conocimiento de los movimientos del Sol y de la Luna cuando menos”*.
2. Las dos construcciones rectangulares se encuentran en campo abierto esto quiere decir que *“fueron concebidas y realizadas, abiertas al espacio celeste para observación de los astros principalmente del Sol”*
3. En el centro del campo sagrado norte se encuentra una estructura cilíndrica de alrededor de 5 metros de longitud, la cual en posición totalmente vertical, tenía la función de *“señalar el momento en que la altura del Sol sobre el horizonte alcanza los 90 grados, dos veces anualmente”*
4. La disposición de los monolitos y la distancia entre estos permite determinar el movimiento del Sol, por medio de las sombras que se proyectan en el suelo, y teniendo en cuenta que dicho movimiento durante un años Solar, entre los equinoccios y los Solsticios se presenta de una manera constante, de esta manera se podía tener una noción del tiempo y de la época del año en la que se encontraban

“la separación intercolumnar de los pilares del campo sagrado del norte facilita, ciertamente, el control del movimiento del astro del día y, por consiguiente, la posición celeste del mismo, con ayuda de la sombra formada en cada una de ellas, según la época del año”

5. El número de columnas, 54 o 55, de las alineaciones del campo sagrado norte, es probable que a través de las sombras fuera manejado *“un valor calendárico relacionado con el ciclo de algunos eventos y fenómenos astronómicos”*.
6. Haciendo uso no Solamente de las sombras que proyectan las columnas, sino de su conocimiento del territorio estableciendo una relación entre la posición de diferentes lugares y las mismas columnas, para determinar los Solsticios y los equinoccios.

“Por medio de las columnas y monolitos alienados y de puntos naturales fijos, como la laguna de Iguaque lo mismo que señales y marcas en el horizonte, entre las que pudo contarse la aparición de las pléyades, los sabios sacerdotes chibchas calcularon, seguramente, los Solsticios y los equinoccios.

La observación de los movimientos del Sol de Solsticio a Solsticio no Solo previno a estos nativos acerca de la temporada de lluvias y de estío sino de eventos y sucesos astronómicos, incluidos los eclipses”.

7. Se encontraron en varias lugares aledaños, postes, figuras fálicas, y pictogramas que hacen alusión a esa observación del astro-rey (ver figura 30) y de ese interés por observar la bóveda celeste, por parte de la cultura Muisca, otro ejemplo que podemos encontrar y traer a colación es el templo del Sol que se encuentra en Sogamoso, en el que cuenta el cronista Juan de Castellanos citado por el autor, *“...el sacerdote tenía grandes conocimientos astronómicos y meteorológicos y sabía predecir los cambios de tiempo y las variaciones de los fenómenos atmosféricos”*

*“por el Sol, la Luna, por las estrellas,
Por las nubes, aves y otros animales,
Y cosas que le daban cierta muestra
De venideros acontecimientos”*



Figura 36: monolitos con formas fálicas que aludían a lo masculino al sol según la cosmogonía muisca.

De esta manera se resalta un conocimiento de la bóveda celeste, por parte de la cultura Muisca, quienes estaban asentados en esta región del país. Ahora bien qué importancia tenía para ellos o mejor de qué forma intervenía dicha observación en la vida de esta cultura.

Los planteamientos del arqueólogo Celis Eliecer Silva, están enfatizados en la realización de ritos y cultos a la fecundidad, además de citar varias cuestiones en el que los Muiscas hacían uso observación del cielo.

Uno de esos planteamientos es en el uso de agricultura debido a la variabilidad del clima y por el suelo semiárido.

dadas las condiciones climático-ecológicas de Villa de Leyva, con suelos secos y áridos, y limitada y desigual lluviosidad, tales operaciones resultaron imprescindibles. Para nuestros cultivadores nativos era necesario saber, con alguna precisión, cuando comenzaban las temporadas de lluvia o de sequía

Dando importancia a la observación de la posición del Sol y de las diferentes sombras proyectadas por el astro rey en el paseo aparente por el cielo. Además cuando el Sol ocupaba cierto lugar en el cielo a eso de las 11-12 de medio día o las 3-4 de la tarde, producía un contraste entre las sombras y los colores rojos que caracterizan algunos monolitos exaltando el espíritu religioso de las comunidades allí presentes. Así lo menciona el arqueólogo las sombras regularmente espaciadas como las columnas que la originan, con su juego de movimientos de crecimiento, degradación y dirección, según la posición del Sol, conmovía profundamente el espíritu religioso de los chibchas.

Se trae a colocación haciendo referencia a dicho culto, al trabajo realizado por el antropólogo Silva, en la publicación de la universidad Nacional de Medellín llamada, culto a la fecundidad, en el que el autor hace un estudio del culto realizado por la cultura Muisca, a la fecundidad en determinadas épocas del año. En donde el Sol se posaba sobre el horizonte y fecundaba la tierra, para el crecimiento de las cosechas y asimismo se realizaban orgías en las que los aborígenes transportados a un mundo superior, por las sustancias que utilizaban en las que se resalta el uso del tabaco “las orgías chibchas, con su complejo de actos y gestos transubstanciados en hierofanías manifiestas en el desenfreno sexual y las danzas, el ritmo de los movimientos, el compás llevado por los pies y las libaciones, los cantos, la música, etc, copulaban con sus respectivas mujeres para un crecimiento tanto de las familias como de las cosechas.

Dichos cultos debían ser realizados en fechas precisas, lo que resalta una observación de la bóveda celeste, tenían por objeto estimular las energías del Sol y reanimar la actividad de la tierra excitar el cielo para que la hierogamia cósmica (lluvia) se realizara en las mejores condiciones para que las plantas fueran abundante en frutos, las mujeres tuvieran hijos y los animales se multiplicaran copiosamente. De esta manera se encuentra una relación entre las formas fálicas de los monolitos y piedras talladas, con la observación del cielo y el culto a la fecundidad.

Por último se resalta los restos encontrados de inhumaciones de cinco personas adultas y dos niños, en el que se resalta un carácter de rito funerario ubicados en lugares específicos y especiales, teniendo en cuenta que culturas como la san Agustín en el que le antropólogo Izquierdo Pena Manuel, realizó un trabajo de arqueo-astronomía con dicha cultura en el parque antropológico de San Agustín encontrando que muchas de las estatuarias que están sobre tumbas y los campos funerarios, están orientados hacia la posición del Sol en puntos específicos como lo son los equinoccios y los Solsticios, de

esta manera se podría intuir la importancia que tenía el Sol como promotor de la vida y que nace al comienzo del día y muere al llegar la tarde, pero que vuelve y nace al siguiente día y así sucesivamente marcando la vida de las personas y el conocimiento cosmogónico, y por esta razón se les divinizó en muchas culturas del mundo antiguo.

De esta manera es probable que el observatorio astronómico Muisca haya tenido también una funcionalidad con tal fin por las tumbas encontradas en donde el señor Silva afirma:

“Hasta el momento no podemos establecer objetivamente cual fuera el tipo o tipos de tumbas correspondientes, pero, por los registros hechos en sitios del “infiernito”, deducimos que la forma de pozo con cobertura circular u ovalada, (...) en esta clase de sepulcros, en los diámetros varía de 0.90 m. y 1.40 m. el cadáver era depositado con los miembros plegados”

Por tanto el observatorio también era un lugar en donde se celebraban ritos funerarios o se estaba convirtiendo en uno, en donde tenía fundamental importancia la posición en el que se enterraba la persona y la dirección hacia donde estaba ubicada el sepulcro según el trabajo del antropólogo Izquierdo, hacia la salida del Sol en determinado día del año en especial en el Solsticio de junio. Y teniendo en cuenta que los monolitos tenían una función de calendario en la observación del movimiento del astro rey por medio de las sombras, podrían determinar el día y el lugar por donde saldría el Sol este día tan especial para muchas culturas antiguas en el mundo, el Solsticio de verano o de junio.

Por consiguiente la cultura Muisca asentada en Villa de Leyva tenía conocimientos astronómicos, que les servían para fijar fechas y momentos especiales para la realización de ritos y fiestas, para la agricultura determinado los días de lluvias y de sequía y para ritos funerarios (Ver figura 31), manifestado en la posición de los monolitos fálicos y de los diferentes pictogramas encontrados en lugares aledaños al “infiernito”, en el que el antropólogo Silva la fuente idónea para este escrito manifiesta lo siguiente:

“manifestación de este sabiduría fueron entre otros, los dos campos sagrados monumentales del “infiernito”, los cuales, como señalamos antes, corresponden a centros de observación y de estudio de carácter astronómico y meteorológico, al propio tiempo que de prácticas de ritos y cultos al Sol”.



Figura 37: Dolmen que cumplía la función de sepulcro para ritos funerarios.

De esta manera se resalta gran parte de esa riqueza astronómica que posee el municipio de Villa de Leyva, en la que la observación del Sol y de la bóveda celeste ha suscitado ese interés por saber que hay allá y como interfiere ese algo en nuestra forma de vivir, como lo manifiesta la cultura Muisca en este asentamiento antropológico, en es comunión entre el cielo, la tierra y el espíritu.

6.4. Ara Solis como dispositivo transversal entre lo didáctico, lo matemático y el contexto por medio del componente legal.

- *Estándar: Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.*

La construcción de ángulos está relacionada directamente con la circunferencia, la división en medida angular de éstas, teniendo en cuenta el conocimiento primitivo de los babilonios, ya que ellos utilizaban un sistema sexagesimal para la instauración de su

sistema de numeración. Pues tuvieron un avance en el campo algebraico, por la invención de la variable, asistiendo a un valor no denominado y la caracterización de la ausencia de algo, el número cero.

Como se mencionó en el capítulo 2, la construcción del concepto de ángulo estuvo relacionada con la observación del movimiento aparente del sol, en Ara Solis, esto se evidencia en diferentes aspectos, tales como: la proyección de las sombras en el transcurso del tiempo demarcadas por el movimiento del sol, en los Falos, que se encuentran fuera del calendario solar, que estos monolitos se encuentran aproximándose a un ángulo de 90 grados, teniendo en cuenta que el terreno está ligeramente inclinado con respecto a la horizontal.

En el calendario muisca (ver imagen 3) se manifiesta la sombra que forma ángulos, teniendo en cuenta si se trata de un equinoccio o un solsticio, por tal motivo el estudiante interactúa con esta sombra sin necesidad de estar allí a las 6 de la mañana.

De esta manera el estudiante reflexiona sobre el comportamiento del sol y como este además de dibujar ángulos entre la sombra y el monolito, está trazando la trayectoria en el firmamento que varía desde los cero grados y los 180 grados, en una dependencia entre el horizonte terrestre, el observador como vértice y el sol. Ver imagen



Figura 38: El sol en Stellarium cuando está en todo el cenit a las 12:00 en el equinoccio de otoño.

Una vez el estudiante evidencie la noción de ángulo, que es la distancia entre una recta y otra, subtendida por un vértice, se trabaja la magnitud y el sistema de numeración quien lo rige, en el caso de los ángulos el sistema sexagesimal (grados, minutos y segundos) o radian (averiguar) (Piñeiro, Ibañes, & Ortega, 1998). Esto se evidencia en la ubicación de cuerpos celestes como se demuestra en el capítulo 2.3 y en el capítulo de 4.2.

- *Estándar: Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.*

Una vez definido el ángulo y sus sistemas de medidas, siguiendo con la línea de la geometría vistas desde la perspectiva histórica los griegos desarrollaron teoremas con el estudio de los triángulos formados por las sombras (gnomon) determinaremos la construcción de triángulos, teniendo en cuenta la linealidad de conceptos que esta determinada.

Para la construcción de Ara Solis, se observó en el infiernito que los Falos que se encuentran ubicados en los alrededores de terreno, sirven como gnómones, que que generan sombra, en la construcción se edifican estos falos con los objetivos que verifiquen 3 conceptos fundamentales para la resolución de triángulos.

1. El Teorema de Tales

En Ara Solis el estudiante podrá observar que los falos que se encuentran alrededor de la finca, se encuentran erigidos en distintas posiciones, cada falo se diferencia de los demás al ver que poseen una altura distinta. Como el Sol forma un ángulo igual, al incidir en todas los Falos, se puede encontrar el concepto de congruencias en los triángulos que se forman, al incidir la el sol en todos lo falos, la altura y sus sombras guardan una proporción o una razón que está ligada Al ángulo que incide del Sol.

2. El Teorema de Pitágoras

Se presenta cuando se le pregunta al estudiante, sombra la distancia de la proyección de la sombra, sabiendo que puede ser un ángulo de depresión con respecto a la altura o una ángulo de elevación con respecto al suelo.

3. Triángulos rectángulos

Se puede observar de lo anterior que el estudiante concluya sobre las propiedades de los triángulos rectángulos, conozca las características y la forma de solucionarlos en un entorno dado, además de calcular alturas, ángulos y distancias. Esto sirve como iniciación al desarrollo de una geometría analítica que se ve posteriormente.

- *Estándar: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.*

Luego de emplear las propiedades para poder medir unidades, por ejemplo la magnitud de medir distancias, la angular que se empleaba la longitud de arcos. No siempre el estudiante carga consigo un transportador o un metro para calcular las distancias (D'more, 2006). Se debe tener en cuenta que una magnitud de medida se puede expresar en unidades de medida, por ejemplo que la altura de un objeto se pueda medir con las manos, con cuaderno o bien con un borrador. El concepto de magnitud se presenta cuando el estudiante interactúa con dichos objetos (Piaget, 1991).

Cumpléndose así la transversalidad con el estándar:

- *Estandar: Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.*

Por otro lado el marco histórico ya mencionado en el capítulo 2 se evidencia que la construcción de una matemática formal se basa en la experimentación con el entorno y en la generalización una situación problema. Resultando así, además de darle solución a un o varios problemas, con respecto a una situación fundamental. (De Guzman, 2007) y (D'more, 2008).

- *Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.*

El estudio de la arqueoastronomía Izquierdo (2008), unida al estudio de la astronomía de posición Portilla (2009), evidencia como nuestros antepasados con el uso de los astros más importantes para el planeta (Sol y Luna), delimitaba su calendario y los ciclos de los cultivos e incluso ceremonias y rituales para el desarrollo de su cultura. Hoy en día el estudio de los esquemas que los antepasados marcaban con las edificaciones neolíticas (en piedra) lugares con formas geométricas que señalaban los eventos más importantes, como la salida y la puesta del sol en las diversas estaciones, además de la predicción de los solsticios y equinoccios e incluso calcular las distancias de las estrellas y planetas (Puerta Restrepo, 1997).

En Ara Solis tiene se tiene en cuenta estas formas geométricas, generando así una simulación más real y fiel. Los Falos eran un símbolo de virilidad, representación masculina de la gran deidad que viene de oriente, ellos marcan la posición astronómica del sol, este astro es la primera referencia. Anteriormente se mencionaba la identificación del sistema de medida de ángulos, que tiene la incidencia del Sol y los Falos, en este apartado la concepción geométrica de la precisión del terreno, donde encontramos varios elementos.

1. La base rectangular del calendario y las diferentes proyecciones de las sombras sobre este calendario.
 2. Los diferentes tipos de triángulos que se generan en las proyecciones de las sombras.
 3. Las diferentes figuras de generalización por las ubicaciones de los astros en el firmamento en el día o en la noche.
 4. El concepto de circunferencia goniometría, partiendo del recorrido angular de los astros
 5. Coordenadas cartesianas para la ubicación de astros en el firmamento.
- *Estándar: Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.*

En la trigonometría, desde el punto de vista histórico se hace honor a Hiparco de Nicea, quien le genera rigor al análisis de los estudios que hicieron los babilonios y los griegos, que a partir de la unidad de medida generada en una circunferencia unitaria (radianes), y el estudio de los triángulos rectángulos y la variación caracterizado por la variación del ángulo, le da rigor matemático. Lo árabes quienes desarrollaron un concepto más elevado de la variable, apoyándose de los estudios astronómicos que acercaron a la desarrollo de las razones trigonométricas, llamadas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Relaciones de una circunferencia y de los arcos que se generan con los triángulos rectángulos, se tiene en cuenta que unos de su hipotenusa es el radio de la circunferencia unitaria, es decir que dicho radio y/o hipotenusa es igual a una unidad real.

El estudio estas razones son las relaciones que se han generado de los catetos¹⁸ de un triángulo rectángulo y el ángulo.

Existen 3 relaciones con respecto al eje “y” y 3 con respecto al eje “x” del sistema de coordenadas. En Ara Solís, se tiene en cuenta al momento de relacionar las figuras geométricas presentes en el sitio de simulación y el recorrido de los astros. Por ejemplo el recorrido de la sol que genera sombras se puede apreciar la variación del ángulo de inclinación al momento de proyectarse sobre los Falos, usándolos como gnómones. Acá las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulos, se establece con rigurosidad para calcular los solsticios y equinoccios. Además de establecer la hora diaria, donde se puede inferir la hora del día teniendo en cuenta la posición del astro sol y en las noches dependiendo de la época de año que marca el sol en su atardecer y con ayuda de las constelaciones. La predicción correcta y precisa de estas relaciones entre sombra y sol, no ubica en que época del año estamos.

La periodicidad de estos sucesos construye la idea de la relación del movimiento angular aparente que genera el sol y de las múltiples distancias que generan las sombras en el suelo.

1. La función seno surge, de la interacción del cálculo de la distancia de un objetos astronómicos y de percibir sus movimientos en la bodega celeste (Stellarium), que fue lo que generalizó Aristarco de Samos, con la interpretación del modelo Heliocentro partiendo del movimiento de la luna y la cuadratura que forma al momento de estar en el cuarto creciente y cuarte menguante que será la relación entre el ángulo que forma la tierra y el sol.
2. En la india se denominaba “jb” a la hoy llamada razón seno, que tiene como objetivo hallar el cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo. Este se usó mucho para el cálculo de alturas desconocidas, distancias entre astros.
3. La razón coseno homologa de la función trigonométrica, es la relación entre un ángulo y el lado adyacente (que nace del mismo punto), de un triángulo rectángulo.

En Ara Solis, se evidencia las razones de tangente y cotangente, cuando se reflexiona sobre el movimiento relativo del sol con respecto a un falo (gnomon) de nuestra

¹⁸ Se denomina cateto a cada lado de los triángulos rectángulos que generan un ángulo recto o los lados menores de un triángulo rectángulo, teniendo como lado más largo la hipotenusa.

simulación. Por ejemplo: El falo representa en un sistema de coordenadas cartesianas un lado del triángulo rectángulo. Como esta no varía ya que tiene una altura determinada. Se podría asumir que hablamos del radio, en una circunferencia unitaria. Al ver que la proyección de la sombra la distancia que exista desde la sombra que genera el falo y la altura. Se concluye que la altura no sería la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo. Lo que modelaría en una circunferencia trigonometría una de las razones tangente y/o cotangente, dependiendo de la vista del observador.

1. La razón tangente de hallaría en calcular los ángulos de un triángulo rectángulo, conociendo la distancia de la sombra y la altura del falo. Es decir la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo.
2. La razón cotangente siendo la surge de la inversa de la tangente, teniendo las mismas características de tangente, pero sabiendo que es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto, de un triángulo rectángulo.
3. Las razones trigonométricas de secante y cosecante serán respectivamente las razones inversas de coseno y seno, en “Ara Solís” se evidencia, aplicando la proporcionalidad inversa entre la hipotenusa y el catetos adyacente para secante y proporcionalidad inversa entre la hipotenusa y el cateto opuesto para cosecante.

El análisis anterior de lo legal, que exige lo matemático sugiriendo lo didáctico, culmina para estar encaminado al análisis de nuestro objeto matemático identificado en el siguiente estándar de competencia establecidos por el MEN.

- *Estándar: Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.*

La implicación que abarca Ara Solís en este último estándar, será el resultado de un proceso que se construye paso a paso, siempre y cuando se vea reflejado por un desarrollo de enseñanza-aprendizaje guiado por el docente, apoyado por Ara Solís y ejecutado por el estudiante. Concluiría un desarrollo conceptual, procedimental y cognitivo del interactuar por medio de un entorno dado. Comprobando así que el dispositivo didáctico, estimulara el proceso de interacción entre un entorno y el conocimiento favoreciendo así el abordaje de la resolución de problemas que encontrara allí.

La función trigonometría, será así la generalización de las razones trigonométricas ya mencionadas, no se especifica un determinado ángulo con respecto un lado, sino la posible variación de un triángulo rectángulo en una circunferencia unitaria. Con un ángulo de referencia, la hipotenusa y los catetos demarcados por los ejes (x,y) en el plano cartesiano.

Dicha generalización de las funciones se ha de representar en diversas formas:

- Algebraica
- Grafica
- Verbal
- Simbólica

Pero el estudio de una función trigonometría, va en la comprensión de los fenómenos periódicos, en el caso de la astronomía será la comprensión de entender los procesos cíclicos del universo o particularmente de los astros que rodean la tierra. Dicha comprensión va en el estudio de las diversas formas de representación que partirán del análisis generalizado por nuestro dispositivo Ara Solís.

Ara Solis, es el dispositivo didáctico que ejemplifica de forma interactiva los ciclos de algunos importantes astros, para la comprensión de la función trigonométrica. Particularmente la generalización del recorrido del sol en un día genera unas marcas que suelen cambiar al transcurrir un determinado tiempo, al terminar dicho ciclo vuelve a empezar y las marcas se generan de forma periódica. Este tipo de eventos suelen ser interpretados por un conocimiento más riguroso que la trigonometría ofrece.



Figura 39: Ara Solis: Simulación del calendario muisca desde SketchUp



Figura 40: Calendario muisca del parque arqueológico de Monquirá (El infiernito)

6.5. RUTA DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA EN ARA SOLIS

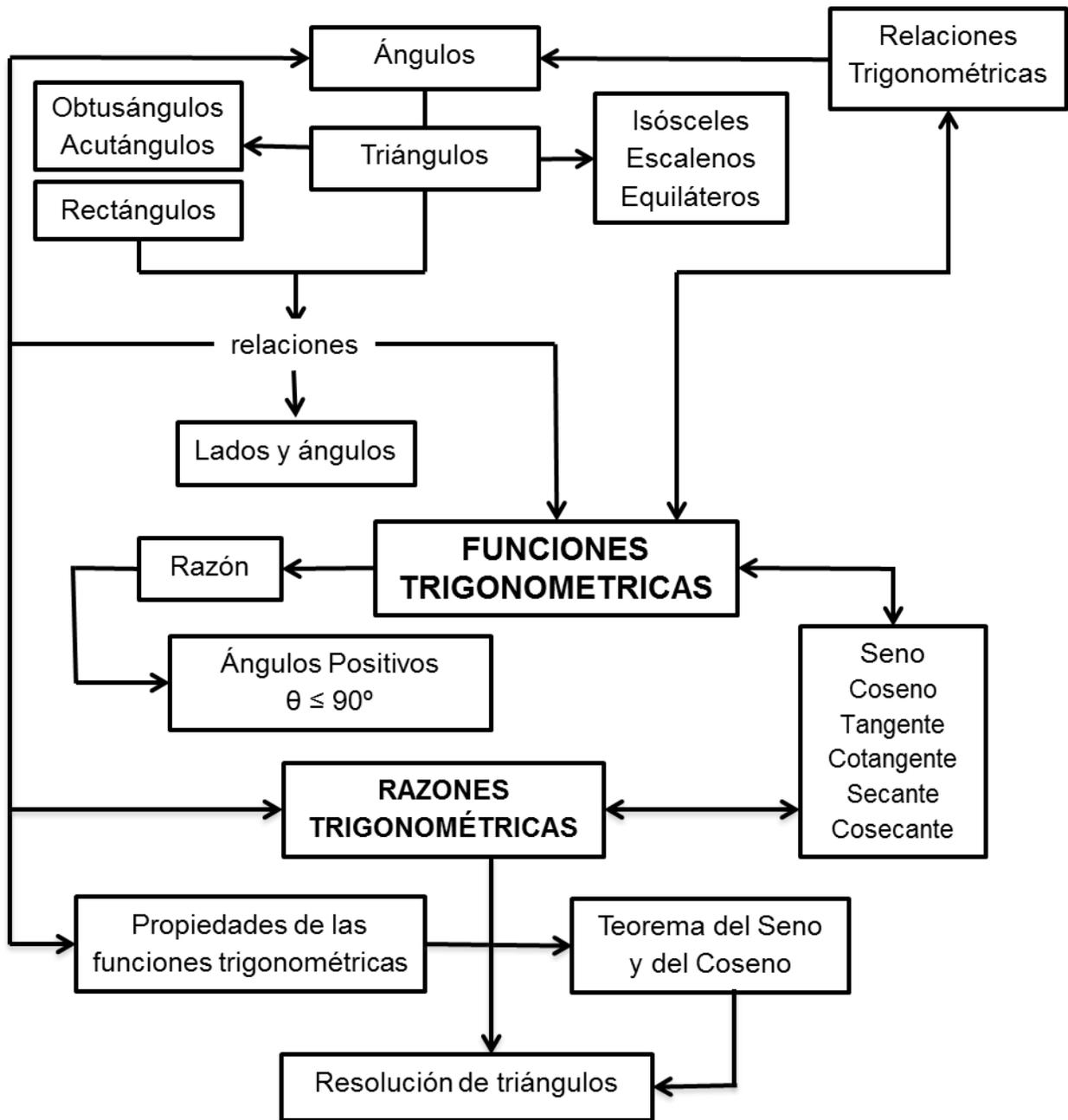


Figura 41: Ruta de aprendizaje de Ara Solis, basado en el desarrollo histórico

6.6. CUADRO CONCEPTUAL DE LA RUTA DE APRENDIZAJE

CONCEPTOS	Ángulos	Tipos	Amplitud	Agudos, rectos, obtusos, llanos
			Posición	Complementarios, suplementarios y opuestos
		Magnitud	Grados: °	Sistema Sexagesimal
			Radianes: rad	Reales
	Triángulos	Tipos	Ángulos	Acutángulos, rectángulos y obtusángulo
			Lados	Equiláteros, isósceles y escaleno
	Triángulos rectángulos	Propiedades	Lados Teorema de tales	Hipotenusa, Cateto opuesto, Cateto adyacente Proporcionalidad entre triángulos teniendo como base un ángulo en común.
	Teorema de Pitágoras	Definición $h^2 = a^2 + b^2$	El cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos.	$h = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{h^2 - b^2}$ $b = \sqrt{h^2 - a^2}$
	Sistemas de coordenadas	Posición	Horarias	Son las que tiene como referencia ángulo horario y declinación
			Horizontales	Son las que tienen como referencia el Azimut y altura
		Cartesiana	Recta Real	Representaciones graficas en planos cartesianos, teniendo en cuenta la relaciones entre los lados de un triángulo y los ángulos.
	Circunferencia unitaria	Definición	Representación	Es una circunferencia de radio 1, con centro en (0,0) en un plano euclideo y cartesiano.
	Razones trigonométricas	Un triángulo rectángulo, donde un vértice está en (0,0)	sen(x)	Razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa
			cos(x)	Razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa
			tan(x)	Razón entre el cateto opuesto y el adyacente
			cot(x)	Razón entre el cateto adyacente y el opuesto
			sec(x)	Razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.
csc(x)			Razón entre la hipotenusa el cateto opuesto.	
Funciones trigonométricas	Caracteriza fenómenos periódicos.	Representaciones	Grafica cartesiana Algebraica Simbólica	
		Características	Amplitud, periodo, desfase, traslación.	

ARA SOLIS

6.7. LA TRIGONOMETRIA DE ARA SOLIS.

Los ángulos

Un ángulo es la unión de dos semirrectas con un mismo origen, la semirrectas se denominan lados y al origen común se le llama vértice. Lo primero es establecer los tipos de ángulos teniendo en cuenta el falo y su posición con respecto al suelo (ver figura 41). El primer tipo de ángulo que se en el vértice A es de 90° , ya que por definición el monolito se encuentra en posición perpendicular al suelo.

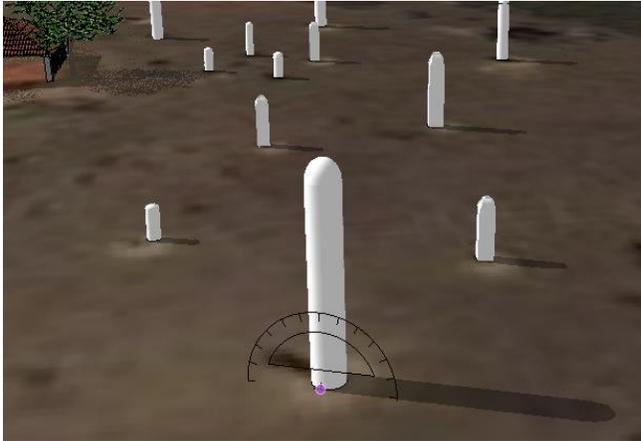


Figura 42: Monolito de Ara Solis generando una sombra con respecto al suelo.

Dentro de la interacción de Ara Solis, podemos manipular el entorno, por ejemplo se cambia la vista aérea en la simulación son la 9 de la mañana y sobre un falo, con una determinada altura, se genera un sombra, se traza un línea guía (azul) para ver como es el paso de sol en el día, con respecto a la línea guía. Llegando a la identificación de los posibles ángulos (agudos y obtusos) que se pueden formar (ver imagen).

Dentro de la interacción de Ara Solis, podemos manipular el entorno, por ejemplo se cambia la vista aérea en la simulación son la 9 de la mañana y sobre un falo, con una determinada altura, se genera un sombra, se traza un línea guía (azul) para ver como es el paso de sol en el día, con respecto a la línea guía. Llegando a la identificación de los posibles ángulos (agudos y obtusos) que se pueden formar (ver imagen).

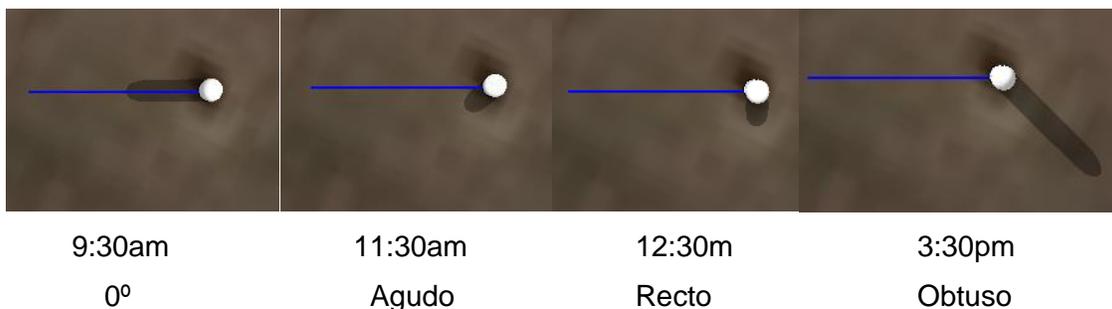


Figura 43: Vista aérea de un monolito en Ara Solis, teniendo en cuenta el transcurso del día.

De esta forma el estudiante podrá observar los diferentes tipos de ángulos que se forman en la interacción de la sombra con la línea guía (azul). Este es solo un ejemplo de las diferentes formas de observar ángulos con el dispositivo.

Magnitudes de los ángulos

Una vez planteado el concepto de ángulo, por la interacción preliminar del Ara Solis, se pretende evidenciar como se puede medir un ángulo teniendo en cuenta su amplitud, caso particular del Sol, en su recorrido aparente por el cielo.

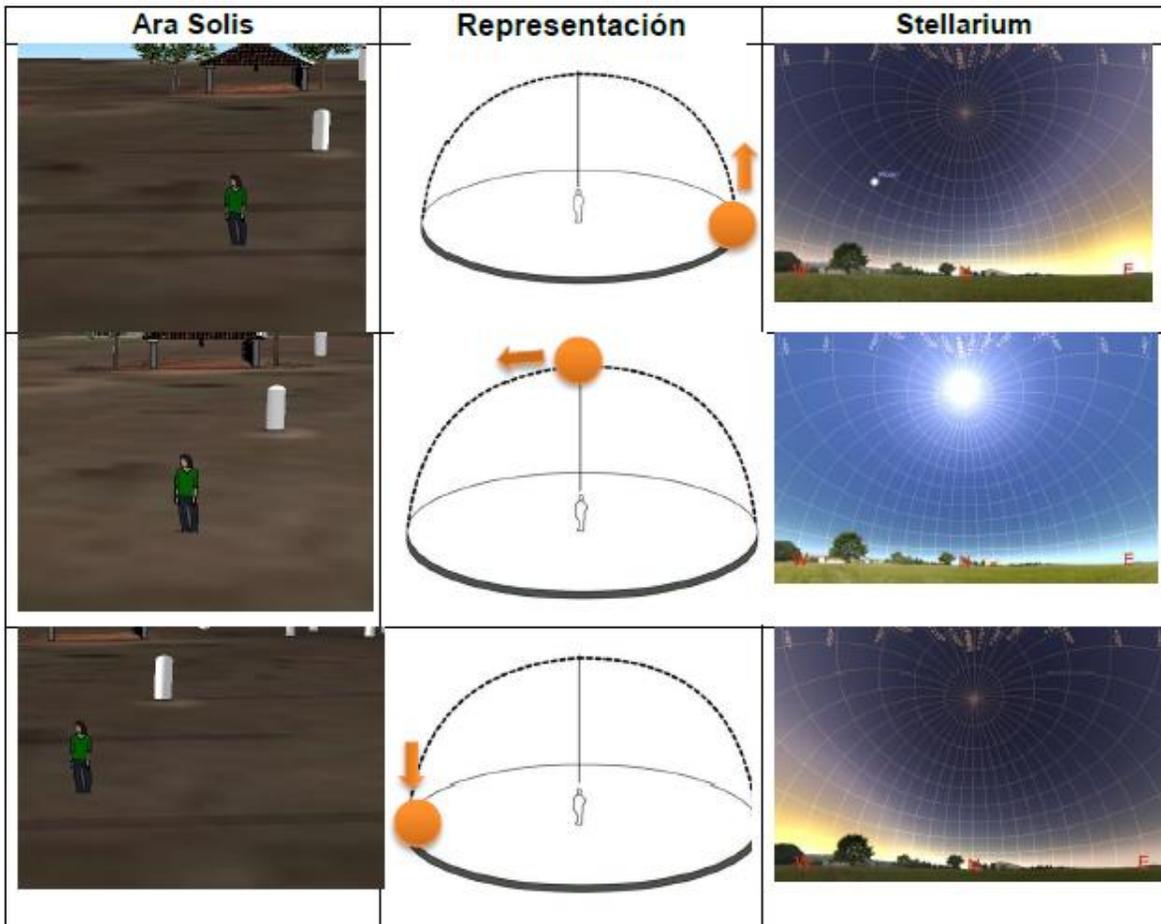


Figura 44: Cuadro comparativo entre la posición de un observado en Ara Solis, Diagrama y Stellarium, de la medición del Sol.

El estudiante interpretara al ver que el sol recorrerá 180° en 12 horas de 6:00am a 6:00pm sabiendo esta premisa podrá identificar cuando recorre el sol en 6 horas es decir 90° . Podrá calcular el tiempo recorrerá cada vez.

$$90^\circ \rightarrow 6hr$$

$$x \rightarrow 1hr$$

$$x = \frac{90^\circ \times 1hr}{6hr} = 15^\circ$$

$$15^\circ \rightarrow 60min$$

$$1^\circ \rightarrow x$$

$$x = \frac{60min \times 1^\circ}{15^\circ} = 4min$$

Concluyendo así que el sol por 1° que recorra en el cielo han pasado aproximadamente 4 minutos, esto fue como los babilonios calcularon el valor del tiempo teniendo como base al sol y su movimiento en el cielo.

Triángulos

La caracterización de los triángulos se encuentra en el mismo ejercicio de los ángulos, se sabe que el triángulo que es el primer polígono que puede construir, se tiene en cuenta una ángulo construido para trazar finalmente otra semirrecta para obtener una figura trilátera en la simulación es muy común encontrar varias figuras.

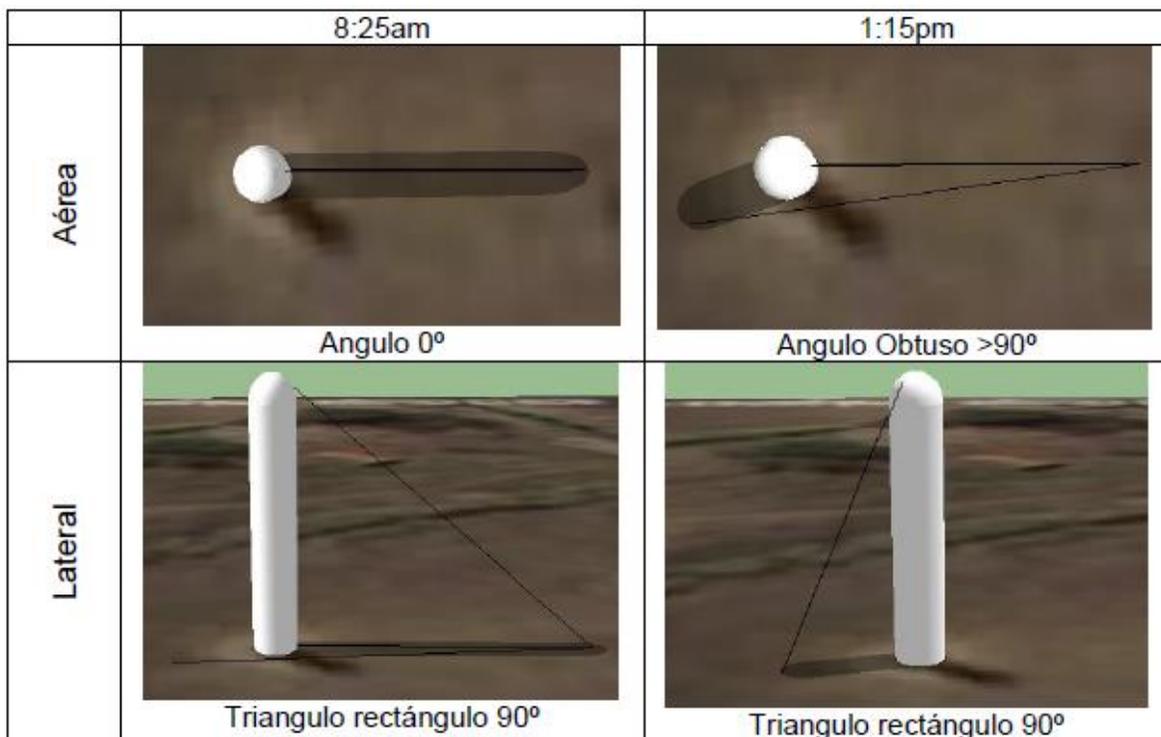


Figura 45: Un monolito observado desde dos perspectivas a dos horas distintas del día. (genera varios triángulos desde donde se observe).

La identificación de triángulos puede llegar a ser amplia si observamos las vistas, la posición, las formas de los Falos, el calendario y la proyección de las sombras, en la mañana, medio día y tarde. Ara Solis está simulado con ayuda de SketchUp, un software de diseño educativo que ofrece un sinnúmero de posibilidades para poder plantear una situación, gracias a su alto contenido de interactividad, además de la simulación de un sitio con un fuerte componente astronómico, esto va ligado a la intención del docente y la situación fundamental que se planteó. (Brousseau, 1986)

Teorema de Tales

El teorema de Tales se cumple que para un triángulo dado, se traza cualquier línea paralela a cualquiera de sus lados, se generara un nuevo triángulo semejante al triángulo inicial. En la simulación se muestra que las sombras son paralelas para todos los Falos, (sabiendo que el sol genera rayos paralelos entre sí) se producirán varios triángulos que serán congruentes entre si ver figura.



Figura 46: Vista aérea de varios monolitos en Ara Solis

Cada falo, representa una altura determinada, ya que se parte del hecho que no todos no son iguales, no se puede hablar de una congruencia, pero si se conoce la medida de la altura de cada falo, y sabiendo que el sol produce rayo paralelo entre si, se puede determinar una congruencia entre todos los triángulos que se producen en el sector.

Partiendo de un ejemplo:



Figura 47: Vista lateral de varios monolitos en Ara Solis.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

Triángulos rectángulos - Teorema de Pitágoras

El triángulo rectángulo es el concepto más usado dentro de la trigonometría, ya que el ángulo recto que el lleva, en Ara Solis se identifica por calcular la distancia entre la punta de un determinado falo y el extremo de la sombra.

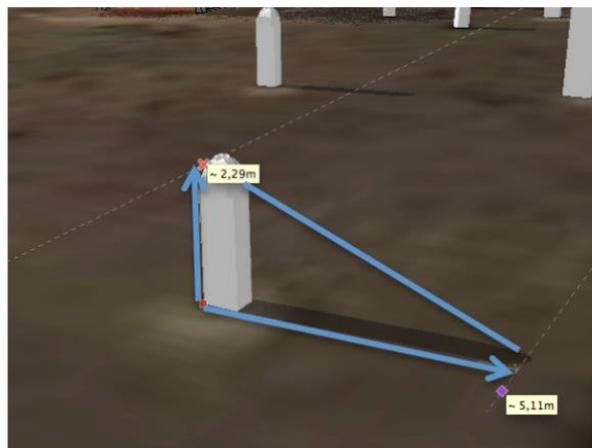


Figura 48: Monolito, proyectando una sombra alas 3:00pm, el 23 de Septiembre.

Con la herramienta metro podemos medir la altura y la sombrar, una vez hecho esto se procede a calcular teniendo en cuenta la definición:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 2,29m^2 + 5,11m^2$$

$$h^2 = 5,24 + 26,112$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{31,352} = 5,59m$$

Esta es una pequeña muestra donde es la evidencian varios esquemas de la forma de solución el teorema de Pitágoras.

Razones Trigonómicas y Función Trigonométrica

La relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo como vimos en la figura 48, determina que es posible observar la relación de los lados de un triángulo rectángulo, ya sea por los lados de un mismo triángulo con el teorema de Pitágoras, con varios como el teorema de Tales. Existen además de las mencionadas las relaciones de los catetos y los ángulos, de un triángulo rectángulo, denominadas las razones trigonométricas. Surge desde la tablillas antiguas que suscitan una relaciones, que la formalizan los árabes e hindúes, denominadoras seno, coseno, tangente, cotangente, secante y secante. En Ara Solis se puede evidenciar en un triángulo rectángulo, y un determinado ángulo distinto al de 90°.

Asimismo la determinación de la periodicidad de los ciclos que se generan de forma anual marcan el inicio y el fin de los recorridos de los movimientos que genera un triángulo rectángulo al variar uno de sus catetos generaliza dichas razones al desarrollo de una concepto de la función trigonométrica, En Ara Solis, tanto el planeta tierra y los astros que lo rodean, el estudio de la periodicidad, de los elementos que allí se pueden apreciar como por ejemplo la medición del calendario astronómico muisca.



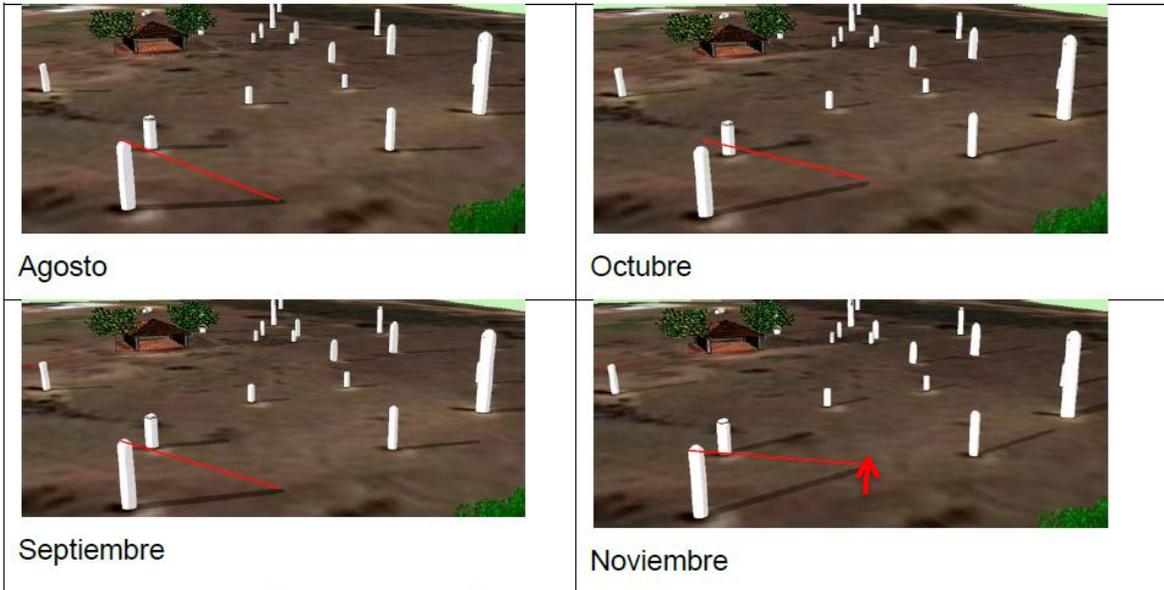
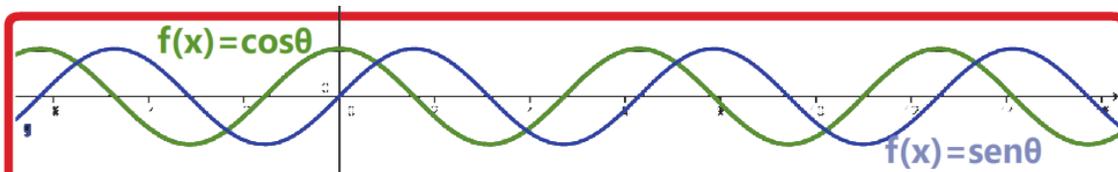


Figura 49: Variación de la posición del Sol con respecto a los monolitos, marca una ruta que se repite, después culminado un ciclo.



Variación de la posición del Sol con respecto a los monolitos, marca una ruta que se repite, después culminado un ciclo.

Figura 50: Gráfica de la función seno y coseno, representado la periodicidad de la razones trigonométricas respectivamente.

7. CAPÍTULO: REFLEXIONES Y CONCLUSIONES.

Después de un arduo camino siempre queda una enseñanza y más que una enseñanza un largo aprendizaje, que se manifiesta en lo que se pueda dejar a los demás, como una huella que se quisiera que otros sigan, no con el fin de hacer un trabajo igual, sino de superarlo y de llevar esos conocimientos que pareciese cifrados dentro de las matemáticas que se pierden con el tiempo y que están presentes en todos los elementos de la naturaleza como afirma Josep Fourier “*el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos*”, y una de esas principales fuentes se encuentra en la astronomía, una disciplina que sufre una paradoja de edad; pues tan vieja es, como la misma existencia de la humanidad pero a la vez tan joven, ya que aún falta mucho por develar de esos secretos que se esconden en ese inmenso mar de éter que se pinta de color del misterio, antes los ojos de los hombres.

Lleno de baches estuvo la realización de este trabajo, que se perdía en ocasiones bajo el halo de olvido y que muchas veces se tuvo que releer para no perder el norte indicado por la estrella polar de la constelación de la osa menor, tal vez eso fue lo que siempre se tuvo claro, que se trabajó en torno a la astronomía, aunque ese mar inmenso de conocimientos tan abrumador, hiciera naufragar en la ruta que se necesitaba para la construcción de Ara Solis, para finalmente entender que la respuesta siempre estuvo en la observación de las estrellas y en preguntas que parecen sin sentido ¿Cómo conocer el transcurso del tiempo? ¿Cuándo se está en un equinoccio o en un solsticio? ¿Cómo saber que ha transcurrido un año? La respuesta estuvo en la ubicación de cuerpos celeste, pero ¿a través de qué? Aún más reveladora la respuesta; a través de un calendario solar que mide el tiempo por medio de las sombras que proyecta el sol en su paseo aparente por el cielo, un calendario que se mantuviera con el paso del tiempo, permitiendo a los hombres recordar la grandeza de la naturaleza que proviene del cielo, entonces se llegó al observatorio solar Muisca (el infiernito).

Ya se tenía un rumbo, faltaba el destino, que era lo que se pretendía alcanzar. Esto llevo a navegar sobre otros dos mares igual de abrumadores; las aguas de la educación matemática y las aguas de las mismas matemáticas. Después de mover los remos de este a oeste, de sur a norte y de intentar mirar más allá en el horizonte, la ruta estaba marcada por líneas que se conectaban unas a otras formando triángulos que apuntaban

hacia el infinito, entonces se entendía que la meta, que el destino era llevar a los estudiantes de educación media ese reloj solar herencia de ese conocimiento precolombino, por medio un dispositivo didáctico para enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y más específicamente de las funciones trigonométricas y quizás quien sabe se pueda generalizar para cualquier objeto matemático de la educación escolar.

7.1. Perspectivas

Ara Solis como dispositivo didáctico y teniendo en cuenta los elementos que se tuvieron en su construcción; matemáticos, didácticos y de contexto en este caso astronómico, se espera que el dispositivo tenga una transición de la teoría a la práctica y que pueda ser usado dentro de las aulas de clase, ya sea para los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las funciones trigonométricas o que genere ideas para enseñar cualquier objeto matemático, siempre y cuando esto se permita. Teniendo en cuenta esa interacción entre actividad matemática y el contexto que proponen los diferentes autores anteriormente referenciados.

Además que el dispositivo o la misma naturaleza de la investigación pueda ser tomado como punto de partida para futuros trabajos de grado para los que aspiran y quieren convertirse en licenciados en matemáticas. Aludiendo a que las matemáticas se encuentran en todo y hacer suscitarse esa curiosidad de buscar en donde otros apenas miran, aunque es un pequeño paso para investigación en educación matemática, y quizá uno sin importancia, permite remitir a esa belleza de las matemáticas que permiten explicar el universo. Además de ser un punto de partida para futuros estudios como por ejemplo la maestría.

7.2. Correspondencia con los objetivos propuestos.

El objetivo general de la investigación está planteada para el diseño de un dispositivo didáctico que permita la construcción de funciones trigonometría, y además llevar ese conocimiento que se encuentra plasmado en la edificación de unas piedras que miran al cielo, con formas fálicas que como explicaba de manera muy enfática la guía del observatorio muisca es la representación de la energía masculina, ya que la femenina se

representa por la tierra , que es la generadora de vida, en esta perspectiva la masculina sería la energía del sol, para entender porque esa adoración a la tierra como proveedora de todo lo que nos rodea pero del sol como propiciador de vida.

De esta manera ese conocimiento no solo de la cosmovisión de las muiscas sino con respecto a las astronomía, como observadores constantes del movimiento de los astros y especialmente el movimiento aparente del sol, los cuales se plasmaron en los diferentes monolitos, a tan solo a 4 horas de Bogotá, es llevado al aula de clase, a través de Ara Solis. Para ello se tuvo en cuenta unos objetivos específicos que se fueron cumpliendo uno a uno, y que a su vez daban forma al dispositivo didáctico, los cuales se mencionaran a continuación manifestando la reflexiones que genero la consolidación de cada uno.

- ❖ *Identificar los fenómenos celestes que se registraron por medio de las figuras fállicas en el observatorio astronómico de Monquirá.*

La Bóveda celeste es algo que se tiene tan próximo como levantar la mirada al cielo, en una noche despejada o en el día en el que astro rey pasea por el cielo. Tan lejos están los cuerpos celestes de nosotros que no se imagina el tamaño del universo y la grandeza de Dios. Pero en una sociedad en la que pareciera que todo está dado, cosas como estas ya no inquietan, ni el saber porque al cabo de doce horas el día da paso a la noche, o porque cambia el clima en algunos lugares del mundo, lo que se conoce por estaciones. Como dichas cosas son socialmente aceptadas y muchas veces sin saber porque suceden se toman por ciertas.

Bien se sabe que los problemas que generaron conocimientos en sociedades antiguas, parecen triviales a los ojos de la modernidad, es más a los ojos de las postmodernidad una sociedad en donde no existen verdades absolutas y en el que los otros manejan el conocimiento y distribuyen la información, haciendo que la curiosidad se vea opacada por el avance desmesurado de la tecnología, en donde lo imposible parece posible. Pero lo que es realmente posible se esconde entre las mentes incrédulas haciendo que sea imposible.

Por tanto, el estudio de la astronomía propone un viaje por el tiempo en donde la observación de los astros era magia y predecía el destino de los hombres, en

donde la indagación del firmamento enmarcaba las tradiciones de los pueblos y sus costumbres y en donde se creía en la grandeza del cielo. En donde dicho estudio permitió a los hombres generar una serie de teorías acerca de la creación y el primer avance de la ciencia, civilizaciones como la Egipcia, La Griega, la Asiria, la Hindú, la Maya, China y así se puede seguir aumentando la lista, lo importante es resaltar la construcción de conocimiento a través una pregunta, un qué, un porqué, un para qué, o cómo.

Aunque a través de las historia se ha producido avance en el estudio de las astronomía, generando múltiples teorías y modelos matemáticos, que permiten predecir fenómenos celestes como los eclipses, las solsticios y equinoccios, las fases de luna y movimientos de las tierra como rotación, traslación, nutación y precesión de los equinoccios, ese universo aún sigue siendo tan desconocido como las mismas profundidades de los océanos, lo que hace que la astronomía tenga un carácter investigativo y aún más genera sorpresa el encontrar al ver una estrella fugaz, o cuando se encuentran dibujos o fotografías de nebulosas, lo que permite suscitar en las personas curiosidad y acercarse de esta manera al estudio de las astronomía.

- ❖ Registrar por medio de modelos matemáticos la manera en que se establecieron los monolitos para la ubicación de cuerpos celestes, haciendo uso de la geometría para la construcción de las funciones trigonométricas.

Para la reconstrucción de un objeto matemático es necesario remitirse a la historia y al proceso que se vivió para la formalización del concepto, de esta manera entender que fue lo que permitió el surgimiento de la noción del objeto de estudio, en este caso de la función trigonométrica, para entenderla como la relación entre dos variables una independiente el ángulo determinado por Π y un número real como término dependiente.

Ahora bien, el surgimiento del objeto matemático estaba ligado directamente al contexto de las civilizaciones y a su vida cotidiana, y para beneficio nuestro estaba ligado a la contemplación del cielo, prediciendo las fechas de los solsticios y de los equinoccios como por ejemplo, generaron una serie de conocimientos

matemáticos como la noción de ángulo y la instauración de un sistema de numeración necesario para agrupar y ordenar datos, como es el caso de la cultura babilónica.

Como se referenció en el apartado 2.2 de la construcción de la función trigonométrica, se hace necesario precisamente ese componente histórico lo que permite determinar cuál es la naturaleza de las matemáticas y que estaba sucediendo en dicha época, para llegar siempre a que las matemáticas están en concordancia con el entorno donde se desarrollan y por tanto hacen parte de un contexto, resaltando una frase dicha por Galileo Galilei "*las matemáticas son el lenguaje con el que dios ha escrito el universo*".

Esto hizo relevante la construcción de la función trigonométrica por medio de los registros astronómicos que están supeditados a la observación del cielo, en especial del sol, del parque arqueológico de Monquirá, llevando al aula por medio del dispositivo didáctico Ara Solis en el que los estudiantes interactúan con esos conocimientos astronómicos con el contaban los muiscas, además de aprender matemáticas.

- ❖ Definir por medio del marco legal (estándares curriculares), didáctico y el uso de la tecnología, los elementos para un proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de educación media.

Teniendo en cuenta que los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tiene una ruta, determinada por los estándares curriculares por competencia, se hace necesario crear estrategias para que los estudiantes a medida que avanzan en su formación adquieran destreza en las competencias matemáticas (modelación; comunicación; razonamiento; formulación, comparación y ejercitación de procedimientos; formulación, tratamiento y resolución de problemas), a través de situaciones didácticas que genere rupturas en sus esquemas cognitivos y lleven al estudiante a la solución de problemas, teniendo en cuenta lo mencionado por (Brousseau, 1986).

Por consiguiente Ara Solis está propuesto para que el docente lo utilice como un dispositivo que permita el planteamiento de situaciones problema, que genere ambientes de aprendizaje propicios para la construcción de conocimiento, y lleve al estudiante a esa triada, determinada por el mismo, el docente, y el conocimiento todo ligado por un contexto.

Además resaltando los niveles por los cuales un estudiante debe pasar, para la formalización de conceptos propuestos por Van Hiele, en cual se inicia con la interacción con las formas y figuras para reconocimiento de éstas, para pasar a una representación e identificación de propiedades, para llegar a un proceso formal en el razonamiento de demostraciones y finalmente a la construcción formal de un teorema, por tal motivo el estudiante debe estar inmerso en un contexto real como lo definió (Jonassen, 2000), que le permita esa interacción del conocimiento matemático con el medio.

Por tanto Ara Solis pretende generar contextos reales enmarcados dentro de la observación astronómica, apoyándose del software Stellarium, permitiendo que el estudiante pueda transportarse de lugar hacia el parque arqueológico de Monquirá y observar el recorrido que hace el sol durante el año y como fueron tomados los registros de este movimiento aparente por medio de las figuras fállicas, entiendo esa relación entre matemática, didáctica y astronomía, para crear estructuras mentales cimentadas en la experimentación de fenómenos celestes.

- ❖ Diseñar el dispositivo didáctico por medio de la transposición entre lo matemático, lo astronómico y el medio educativo, que sirva como contexto para el estudiante de grado décimo en la aplicación de razones trigonométricas.

El hondar en los diferentes disciplinas, permite encontrar que la afirmación *matemática en todo* que propone (D'Amore, 2008), es más que cierta y nos exhorta a que busquemos con ojo de lupa la belleza de las matemáticas que se esconde en cada uno de los saberes, para que llevarlos al aula y permitir que los estudiantes además de resaltar la importancia de las matemáticas encuentre su belleza escondida bajo un velo de lo desconocido formado por la falta de interés y el pudor que produce en algunas personas estudiar matemáticas.

Ara Solis por su componente matemático, astronómico y educativo, permite evidenciar precisamente esa relación entre estas disciplinas, respondiendo de alguna manera a la pregunta planteada en la introducción ¿en qué momento se perdió esa relación con las demás disciplinas?, asumiendo que no es que se haya perdido la relación con las demás disciplinas sino que se encuentran en componentes netamente particulares y cifrados de cierta manera, solo para aquellos que estudien cada disciplina por separado pero que dicha relación se encuentra directamente evidenciado en los diferentes sucesos que están demarcados por hechos históricos que permitieron la consolidación de conocimientos para el avance de la ciencia.

7.3. Contribución a la formación de profesores.

Uno de los aportes que hace Ara Solis a la formación de profesores, es el hecho de llevar al aula de clase, ese conocimiento de los muiscas que está plasmado en la disposición de monolitos para la observación del movimiento de cuerpos celestes y en especial del astro rey. Evidenciando por una parte la importancia que tenía la observación de las estrellas, pues esto llevo a instauración de las monolitos como los del calendario solar, y por otra parte aunque no se mencione en el desarrollo de la monografía el conocimiento que se puso en juego para labrar la piedra, erigirlas y dejarlas en el lugar que les corresponde, de esta manera la cultura muisca poseía un conocimiento que se encuentra plasmada en el trabajo con la piedra.

A partir de ese conocimiento astronómico vincular o hacer la transición al plano educativo en cuanto a la construcción de la función trigonométrica, por medio de un dispositivo didáctico construido con ayuda de software de libre acceso como (stellarium y sketshup), lo que hace palpable además de ese conocimiento de antiguas culturas, el uso de las nuevas tecnologías, como excusa para crear nuevos ambientes de aprendizaje.

El aventurarse en territorios que parecen desconocidos a la vista del desapercibido permitió, un gran aprendizaje en este caso de la astronomía, mostrándonos la belleza de observar a través de un telescopio la luna o júpiter y empezar a dibujar a través de líneas imaginarias constelaciones en el cielo, además que se contaba con un lenguaje en común

que son las matemáticas, lo que permitió que esta travesía fuera más enriquecedora, como profesores de matemáticas y como personas que gustan de estar aprendiendo nuevas cosas, además de aprender a usar la herramientas tecnológicas ya mencionadas.

Y de nuevo remitiéndose a la frase *matemática en todo*, permite vislumbrar que las fuentes de las matemáticas son muchas y variadas, que pueden ser usadas como excusas para llevar al aula de clase en el que los estudiantes además de aprender dichas matemáticas pueden construir nuevos conocimientos.

Por último se propone y esto teniendo en cuenta la experiencia como estudiantes para profesor de matemáticas, la vinculación en el plan de estudio de un espacio de formación destinado a la construcción de la función trigonométrica, teniendo en cuenta su riqueza histórica y su relación con la astronomía, además de ser la función la generalización de las razones trigonométricas y esto un constructo que viene ligado a la interacción con un contexto. Pues el solo levantar la mirada al cielo ya suscita una serie de interrogantes que pueden ser aprovechados para la construcción de conocimiento.

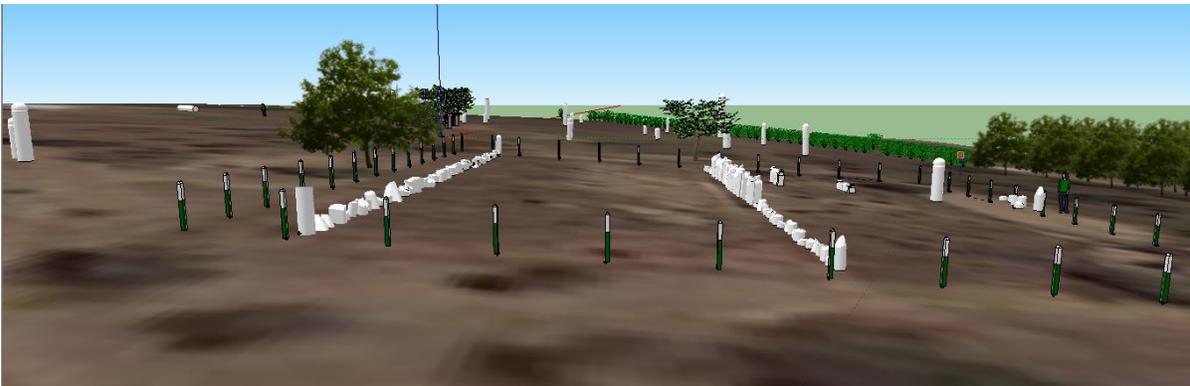


Figura 51: Ara Solis calendario solar muisca.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Avetti, G. (1992). *Historia de las astronomía*. (A. Rossi, Trad.) México: Fondo de Cultura Económica.
- Belomonte, J. (2005). *Las Leyes Del Cielo: Astronomía y Civilizaciones Antiguas*. Madrid: Temas de hoy.
- Betancur, J. (1 de Junio de 2006). *Marcadores solares de la cultura de San Agustín*. Recuperado el 23 de Agosto de 2011, de Aprende en Línea: <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/boletin/article/viewFile/6895/6312>
- Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática, La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Madrid: Paidós.
- Bishop, A. (2005). *Aproximacion sociocultural a la educación matemática*. Cali: Universidad del Valle.
- Bishop, A. (2005). *Aproximacion sociocultural a la educación matemática*. Cali: Universidad del Valle.
- Bogotá, P. d. (2005). Recuperado el 15 de Agosto de 2012, de http://www.diasolar.es/material/reloj_de_sol.pdf
- Bolaños Muriel, D. (S. f. de S. f. de S. f.). *Colombia Aprende*. Recuperado el 19 de Marzo de 2013, de Colombia Aprende: http://www.colombiaprende.edu.co/html/home/1592/articulos-166142_archivo_pdf9.pdf
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba, Facultad de física, matemáticas y astronomía.
- Burch, S. (S.f.). *Universitat de Barcelona*. Recuperado el 10 de Julio de 2012, de Universitat de Barcelona: <http://www.ub.edu/prometheus21/articulos/obsciberprome/socinfocon.pdf>
- Calvo Mozo, B. (2001). La esfera celeste y coordenadas astronómicas. En G. Puerta Restrepo, *Astronomía para Todos* (págs. 81-103). Bogotá: Universidad Nacional.
- Cantoral, R. (2001). Enseñanza de las matemáticas en la educación superior. *Sinéctica*, 3-27.
- Cárdenas Cubides, J. A. (2011). *Biblioteca digital Universidad Nacional*. Recuperado el 15 de Febrero de 2012, de Biblioteca digital Universidad Nacional: <http://www.bdigital.unal.edu.co/4926/1/jennyastridcardenascubides.2011.pdf>

- Chevallard, Y., Bosh, M., & Gascón, J. (2006). *Telesecundario. Tabasco*. Recuperado el 15 de Marzo de 2012, de Telesecundario. Tabasco: http://telesecundaria.setab.gob.mx/pdf/matematicas/matematicas_anto1.pdf
- Contraloría General de la Nación . (S. f. de S. f. de S. f.). *Aducesar: Asociación de Educadores del Cesar*. Recuperado el 19 de Marzo de 2012, de Aducesar: Asociación de Educadores del Cesar: <http://www.aducesar.com/media/files/arc0000045.pdf>
- D'amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio-Secretariado Europeo per le Pubblicazioni Scientifiche.
- D'Amore, B. (2008). *Matemática en todo: recorridos matemáticos inusuales y curiosos*. Bogotá: Magisterio.
- De Guzman, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas. *Revista Iberoamerica de educación*, 19-58.
- Dolores, C. (Recuperado el 20 de abril de 2011 de Noviembre de 2004). *El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato*. Obtenido de Comité latinoamericano de matemática educativa : <http://www.clame.org.mx/documentos/alme13.pdf>
- Dorce, C. (2006). *Ptolomeo: El astrónomo de los círculos* . Madrid: Nivola libros y ediciones.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.: Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle.
- Elorza, G. (2007). *Consultor didáctico Colombia: amarillo, azul y rojo*. Bogotá: Cultura internacional.
- Fajardo, J. (1997). *San Agustín: Una cultura alucinada*. Barcelona: Plaza y Janes.
- Ferro, I. (1999). *Diccionario de Astronomía*. México: Fondo de cultura económica.
- Flores Gil, F. L. (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría*. Jaen: Ittakus.
- Forero Poveda, A., Morales García , J., Beltran Triana , J., & Arenas Torres, F. (2005). *Conceptos que originaron la trigonometría y las secciones cónicas y su vinculación con los programas de enseñanza actual*. Bogotá: Tesis de pregrado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Forero, A., & Fonseca, J. (2009). *Taller de Ciencias (L.E.B.E.M.)*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.
- Garduño López, M. E., Aranda Pastrana, E., Hernández, N. A., & Wilebardo., M. (2004). *Técnicas de investigación documental. Antología* . Juárez: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ciencias Sociales y Administración, Programa de Licenciatura en Sociología.

- Genebriera, J., & Doreste, J. (s.f.). *Paralaje estelares, la 61 cygni*. Recuperado el 15 de Octubre de 2012, de AstroPalma: <http://www.astropalma.com/PARALAJES%20ESTELARES.pdf>
- Genebriera, J., & Doreste, J. (S.f.). *Paralaje estelares, la 61 cygni*. Recuperado el 15 de Octubre de 2012, de AstroPalma: <http://www.astropalma.com/PARALAJES%20ESTELARES.pdf>
- Gómez, P. (13 de Septiembre de 2009). *Análisis didáctico y uso de la tecnología en el aula de matemáticas*. Recuperado el 15 de Octubre de 2011, de Universidad de los Andes: <http://funes.uniandes.edu.co/385/1/GomezP04-2781.pdf>
- Hawkins, G. (1987). *Stonehenge Decoded*. New York: Dorset Press.
- Isabel, R. G., Manuela, A. M., & Cristina, R. P. (Mayo de 2007). *Universidade do Minho*. Recuperado el 12 de Julio de 2012, de Universidade do Minho: <http://w3.math.uminho.pt/~fmena/tp30maio.pdf>
- Izquierdo, M. (2008). Arqueoastronomía. En G. Portilla, *Astronomía para todos* (págs. 45-78). Bogotá: Planeta.
- Jonassen, D. (2000). El diseño de entornos de aprendizaje constructivista. En C. Reigeluth, *El diseño de la instrucción*. Madrid: Santillana.
- Jordi, S., Rosa, M., & Carles., F. (S. f. de S. f. de S. f.). *Dialnet*. Recuperado el 19 de Marzo de 2012, de Dialnet: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2475999.pdf
- Jurado, Y. (2002). *Técnicas de investigación documental: manual para la elaboración de tesis, monografías, ensayos e informes académicos : APA, MLA y ML*. México: International Thomson Editores, S. A. de C. V.
- LEBEM. (1999). *Documento de Acreditación Previa*. Bogotá: Universidad Distrital .
- Liller, W. (1996). *Los Antiguos Observatorios Solares de Rapa Nui: La Arqueoastronomía de Isla de Pascua*. Los Osos, CA: Easter Island Foundation.
- Litwin, E. (1997). Corrientes didácticas contemporáneas. En E. Litwin, *Las nuevas tecnologías en tiempos de internet* (pág. Cap 4). Buenos Aires: Paidós.
- Llinares, S. (2004). *Universidad de Alicante* . Recuperado el 15 de Agosto de 2012, de Universidad de Alicante: <http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/5302/1/llinares-bogota08.pdf>
- Lull, J. (2005). *La astronomía en el antiguo Egipto*. Valencia: Universitat de Valencia.
- Martínez, V., Miralles, J., Marco, E., & Galadí-Enríquez, D. (2005). *Astronomía fundamental*. Valencia: Grupo Carduche.
- Meléndez, J. (SF). *Cómo midió Aristarco la Luna y el Sol*. Madrid: Universidad Carlos III.

- MEN. (1998). *Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado el 30 de Agosto de 2010, de Ministerio de Educación Nacional: http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2007). *Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado el 10 de Julio de 2012, de Ministerio de Educación Nacional: http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Michell, J. (2002). *Introducción a la astroarqueología: Sacerdotes-astronomos en la antigüedad*. Madrid: Oberon.
- Misión Ciencia, Educación y Desarrollo (Bogotá). (1994). *Colombia al filo de la oportunidad. Misión Ciencia, Educación y Desarrollo*. Bogotá: Santa Fe de Bogotá : Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional, 1994.
- Montiel E, G. (21 de Septiembre de 2007). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 590.
- NTCM. (15 de Noviembre de 2003). *Principios para matemáticas escolares*. Recuperado el 15 de Octubre de 2011, de Eduteka: <http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php>
- Ochoa, R. (1994). El campo científico de la pedagogía. En R. Ochoa, *Hacia una pedagogía de conociminetos* (págs. 107-125). Bogotá: McGraw-Hill.
- Ospina de la Roche, A. (2001). *El Legado Maya: Los Aportes de un Pueblo Sorprendente a Las Matemáticas y la Astronomía*. Bogotá: Planeta.
- Piaget, J. (1974). La Toma de Conciencia. En J. Piaget, *La Toma de Conciencia* (pág. 2). Paris: Presses universitaires de France.
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de la psicología*. Barcelona: Labor. S.A.
- Piñeiro, M. E., Ibañes Jalon, M., & Ortega del Rincon, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Sintesis S.A.
- Piñeiro, M., Ibañes, M., & Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Sintesis.
- Planetario de Bogotá. (2005). *Día solar Europeo*. Recuperado el 15 de Agosto de 2012, de Día solar Europeo: http://www.diasolar.es/material/reloj_de_sol.pdf
- Portilla, J. G. (2009). *Elementos de astronomía de posición*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.
- Puerta Restrepo, G. (1997). *Guía para viajeros del cielo : astronomía con binoculares*. Bogotá: Planeta.

- Quijano, A. (2008). *Arqueoastronomía de obras rupestres en el municipio de Pasto: sector noroccidental*. San Juan de Pasto: Imprecol.
- Ramírez Eras, A. M. (1 de Marzo de 2001). *ICCI: Instituto Científico de Culturas Indígenas*. Recuperado el 15 de Octubre de 2011, de ICCL: Instituto Científico de Culturas Indígenas : <http://icci.nativeweb.org/yachaikuna/1/ramirez.pdf>
- Real Pérez, M. (2011). *Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. Recuperado el 9 de Julio de 2012, de Universidad de Sevilla: http://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf
- Real Perez, M. (S.f.). Recuperado el 15 de Agosto de 2012, de http://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf
- Rincon Castillo, H. A. (2008). *PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE Las Secciones Cónicas Desde Una Aproximación a la Historia De La Ciencia: La Astronomía*. Bogotá: Tesis de pregrado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Rincon, D. (2009). *Unidad Didáctica: Enseñanza de la magnitud en astronomía escolar, con un aula integrada por estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto de la básica primaria*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Sagan, C. (1985). *Cosmos*. New York: Ballantine Books.
- Sánchez, A. (2001). *Astronomía y matemáticas en el antiguo Egipto*. En A. Sánchez, *Astronomía y matemáticas en el antiguo Egipto*. Madrid: Aldebarán.
- SED. (Noviembre de 2007). *Secretaría de educación distrital*. Recuperado el 10 de Julio de 2012, de Secretaría de educación distrital: http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/99198-Pensamientomate_bja.pdf
- Silva Calderon, L. H., & Baquero, D. C. (2009). *Las Matemáticas del Cielo*. Bogotá: Voluntad.
- Silva, C. E. (1981). Investigaciones arqueológicas en Villa de Leyva. *Boletín museo del oro*, 1-19.
- Silva, C. E. (1987). Culto a la fecundidad : Los falos muiscas de Villa de Leiva. *Maguaré: Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Antropología.*, 167-182.
- Tall, D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking*. Hungría: El papel de la discusión .
- Torres, R. (21 de Abril de 2005). *Sociedad de la información / Sociedad del Conocimiento*. Recuperado el 30 de Junio de 2012, de Universidad de Barcelona: <http://www.ub.edu/prometheus21/articulos/obsciberprome/socinfosoccon.pdf>
- Urbano, R. (1 de Febrero de 2010). *Geometría en las esculturas del parque arqueológico de San Agustín*. Recuperado el 25 de Agosto de 2011, de Revista Latinoamericana de

Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática:
<http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/22/22>

Vargas, W., Bonilla, J., & Niño, E. (2012). *observatorio solar muisca de Saquenzipa: Comprobación topográfica y astronómica*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R., Rocha, P., & León, O. (2008). El juego, resolución de problemas y el proyecto de aula como dispositivos en las didácticas de la matemática y la estadística. *Encuentro de matemáticas educativa IV*, n.a.

Zimmermann, H. (1981). *La astronomía y la escuela*. Jena: Universidad Friedrich Schiller de Jena.

9. ANEXOS



Figura 52: Dolmen funerario y algunos monolitos.



Figura 53: algunos monolitos distribuidos hacia el sur con respecto de la entrada al parque.



Figura 54: Calendario solar muisca.



Figura 55: Alineación en el calendario solar y la proyección de la sombra.



Figura 56: algunos monolitos alineados.



Figura 57: Sombras proyectada por algunos monolitos

10. ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. MONOLITOS ALINEADOS EN EL CALENDARIO SOLAR MUISCA.....	13
FIGURA 2. TABLA DEL PROCESO METODOLÓGICO PARA EL DESARROLLO DE ARA SOLIS	24
FIGURA 3: CARACTERIZACIÓN DE LA BÓVEDA CELESTE DIVIDO EN DOS HEMISFERIOS.	28
FIGURA 4: DIVISIÓN DE LA BÓVEDA CELESTE EN LÍNEAS IMAGINARIAS.....	29
FIGURA 5: UBICACIÓN DE UN CUERPO CELESTE HACIENDO USO DE COORDENADAS HORIZONTALES.....	30
FIGURA 6: UBICACIÓN DE UN CUERPO CELESTE USANDO COORDENADAS HORARIAS.....	31
FIGURA 7: UBICACIÓN DE UN CUERPO CELESTE UTILIZANDO COORDENADAS ECUATORIALES ABSOLUTAS.....	32
FIGURA 8: REPRESENTACIÓN DE LAS 12 CONSTELACIONES DEL ZODIACO EN TORNO A LA TIERRA Y EL SOL.	34
FIGURA 9: REPRESENTACIÓN DE LA PROYECCIÓN DE LA SOMBRA CON RESPETO A LA LUZ SOLAR.	35
FIGURA 10. REPRESENTACIÓN DE LAS SALIDAS Y PUESTAS DEL SOL DURANTE LOS EQUINOCCIOS Y SOLSTICIOS VISTA DESDE LA PLAZA DE BOLÍVAR, EN EL CENTRO DE BOGOTÁ.	37
FIGURA 11. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.....	37
FIGURA 12: REPRESENTACIÓN DE LA DEDUCCIÓN DEL MODELO HELIOCÉNTRICO DE ARISTARCO DE SAMOS. IMAGEN DE LA LUNA EN MEDIA CRECIENTE TOMADA DE STELLARIUM.	39
FIGURA 13: RELACIÓN ENTRE CÍRCULOS Y TRIÁNGULOS PLANTEADOS POR HIPARCO, TENIENDO EN CUENTA EL MOVIMIENTO DEL SOL.....	40
FIGURA 14: RELACIÓN DE LA CUERDA CON LA FUNCIÓN SENOS.	42
FIGURA 15: TABLA DE RELACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SENOS.....	44
FIGURA 16. OBSERVACIÓN DE UN CUERPO CELESTE DESDE DOS FECHAS DIFERENTES EN LA TIERRA.....	46
FIGURA 17: DATOS A TENER EN CUENTA EN LOS CÁLCULOS TRIGONOMÉTRICOS PARA HALLAR LA DISTANCIA A UNA ESTRELLA.....	47
FIGURA 18: SOMBRA QUE PROYECTA EL MONOLITO A LAS 3 DE LA TARDE DEL MES DE MARZO. 50	
FIGURA 19: AGUJAS QUE INDICAN EL COMIENZO DE LOS SOLSTICIOS Y DE LOS EQUINOCCIOS. TOMADO DE HTTP://WWW.SKYSCRAPERCITY.COM/SHOWTHREAD.PHP?P=100130554	51
FIGURA 20. DIAGRAMA QUE RESUME LOS ASPECTOS A TENER EN CUENTA EN EL DISPOSITIVO DIDÁCTICO	56
FIGURA 21: DIFERENTES TIPOS DE CONSTELACIONES SEGÚN LA CULTURA.....	67
FIGURA 22: LA BÓVEDA CELESTE EL 21 DE DICIEMBRE A LAS 12 DE LA NOCHE.	68
FIGURA 23: LA CONSTELACIÓN DE ORIÓN EN EL CENIT DEL OBSERVADOR.	69
FIGURA 24: INFORMACIÓN APORTADA POR STELLARIUM DE LA ESTRELLA BETELGEUSE DE LA CONSTELACIÓN DE ORIÓN.	70
FIGURA 25: ALGUNAS CONSTELACIONES (CRUZ DE SUR Y CENTAURO) QUE SIRVEN PARA UBICAR EL SUR.....	70
FIGURA 26. ALGUNAS CONSTELACIONES (ORIÓN, TAURO, LIEBRE, CANIS MAJOR, COLUMBA) QUE SE PUDO OBSERVAR EN LA NOCHE DEL 21 DE DICIEMBRE DEL 2012, EN BOGOTÁ. IMAGEN TOMADA DE STELLARIUM.....	73

FIGURA 27. LA LUNA EN SU CUARTO CRECIENTE JUNTO AL PLANETA VENUS.....	75
FIGURA 28: REPRESENTACIÓN DEL SITIO ARQUEOASTRONÓMICO STONEHENGE. IMAGEN TOMADA Y MODIFICADA DE HTTP://ABYSS.UOREGON.EDU/~JS/GLOSSARY/STONEHENGE.HTML	78
FIGURA 29: REPRESENTACIÓN DE LA SALIDA DEL SOL Y LA LUNA EN SOLSTICIOS Y EQUINOCCIOS.....	80
FIGURA 30: AGUJEROS AUBREY PARA UBICACIÓN DEL SOL O DE LA LUNA.	81
FIGURA 31. SALIDA DEL SOL EN EL SOLSTICIO DE VERANO POR EL TERRAPLÉN EN EL PARQUE ARQUEOLÓGICO DE SAN AGUSTÍN.	84
FIGURA 32: REPRESENTACIÓN DE LA SALIDA DEL SOL EN LOS DIFERENTES SOLSTICIOS Y EQUINOCCIOS, EN EL PARQUE ARQUEOLÓGICO DE SAN AGUSTÍN.	85
FIGURA 33: POSTER DE INVITACIÓN AL ENCUENTRO DE ASTRONOMÍA EN VILLA DE LEYVA. FEBRERO 2011.	88
FIGURA 34: COMPARACIÓN DEL TAMAÑO DE UN MONOLITO CON RESPECTO A UNA PERSONA. .	90
FIGURA 35: ALINEACIÓN DE LOS MONOLITOS PARA LA OBSERVACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL SOL, POR MEDIO DE LAS SOMBRAS.	90
FIGURA 36: MONOLITOS CON FORMAS FÁLICAS QUE ALUDÍAN A LO MASCULINO AL SOL SEGÚN LA COSMOGONÍA MUISCA.	93
FIGURA 37: DOLMEN QUE CUMPLÍA LA FUNCIÓN DE SEPULCRO PARA RITOS FUNERARIOS.	96
FIGURA 38: EL SOL EN STELLARIUM CUANDO ESTÁ EN TODO EL CENIT A LAS 12:00 EN EL EQUINOCCIO DE OTOÑO.	97
FIGURA 39: ARA SOLIS: SIMULACIÓN DEL CALENDARIO MUISCA DESDE SKETCHUP	104
FIGURA 40: CALENDARIO MUISCA DEL PARQUE ARQUEOLÓGICO DE MONQUIRÁ (EL INFIERNITO)	104
FIGURA 41: RUTA DE APRENDIZAJE DE ARA SOLIS, BASADO EN EL DESARROLLO HISTÓRICO.	105
FIGURA 42: MONOLITO DE ARA SOLIS GENERANDO UNA SOMBRA CON RESPECTO AL SUELO.	107
FIGURA 43: VISTA AÉREA DE UN MONOLITO EN ARA SOLIS, TENIENDO EN CUENTA EL TRANSCURSO DEL DÍA.	107
FIGURA 44: CUADRO COMPARATIVO ENTRE LA POSICIÓN DE UN OBSERVADO EN ARA SOLIS, DIAGRAMA Y STELLARIUM, DE LA MEDICIÓN DEL SOL.....	108
FIGURA 45: UN MONOLITO OBSERVADO DESDE DOS PERSPECTIVAS A DOS HORAS DISTINTAS DEL DÍA. (GENERA VARIOS TRIÁNGULOS DESDE DONDE SE OBSERVE).	109
FIGURA 46: VISTA AÉREA DE VARIOS MONOLITOS EN ARA SOLIS.....	110
FIGURA 47: VISTA LATERAL DE VARIOS MONOLITOS EN ARA SOLIS.....	111
FIGURA 48: MONOLITO, PROYECTANDO UNA SOMBRA ALAS 3:00PM, EL 23 DE SEPTIEMBRE.	111
FIGURA 49: VARIACIÓN DE LA POSICIÓN DEL SOL CON RESPECTO A LOS MONOLITOS, MARCA UNA RUTA QUE SE REPITE, DESPUÉS CULMINADO UN CICLO.	113
FIGURA 50: GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO Y COSENO, REPRESENTADO LA PERIODICIDAD DE LA RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RESPECTIVAMENTE.	113
FIGURA 51: ARA SOLIS CALENDARIO SOLAR MUISCA.	121
FIGURA 52: DOLMEN FUNERARIO Y ALGUNOS MONOLITOS.	128
FIGURA 53: ALGUNOS MONOLITOS DISTRIBUIDOS HACIA EL SUR CON RESPECTO DE LA ENTRADA AL PARQUE.....	128
FIGURA 54: CALENDARIO SOLAR MUISCA.....	129

FIGURA 55: ALINEACIÓN EN EL CALENDARIO SOLAR Y LA PROYECCIÓN DE LA SOMBRA.....	129
FIGURA 56: ALGUNOS MONOLITOS ALINEADOS.....	130
FIGURA 57: SOMBRAR PROYECTADA POR ALGUNOS MONOLITOS.....	130